15.2.9. 记 $\{f_n\}$ 和 f 定义域为 D. $\forall \varepsilon>0$. $\exists N$ s.t. $\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ $(\forall n>N)$ $(*)$

先固定 $n>N$. 由 $\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$ 存在, $\exists\,\delta>0$ s.t. $\forall x_1,x_2\in B(x_0,\delta)\cap D$. $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$

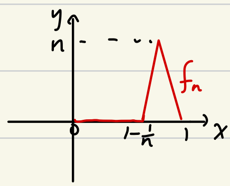
此时 $|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-f_n(x_1)|+|f_n(x_1)-f_n(x_2)|+|f_n(x_2)-f(x_2)|$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

由 Cauchy 收敛准则, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在. 由 $(*)$, 其实有 $|\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)|\le\frac{\varepsilon}{3}$ $(\forall n>N)$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ □

15.2.14



15.2.18 通过考虑级数之差. 不妨 $E=\{x\in(-R,R)\mid\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\}$ 有聚点, 证 $a_n\equiv0$.

Claim (不平凡): 幂级数可在收敛区间 $(-R,R)$ 内任一点 x_0 展开, 且新的收敛半径 $R'\ge\min\{x_0+R,R-x_0\}$

若 Claim 成立, 则将 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在聚点 x_0 处展开成 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$. 若 $\exists\, n$ s.t. $c_n\neq0$. 取最小的 n_0.

则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n=c_{n_0}(x-x_0)^{n_0}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n+n_0}}{c_{n_0}}(x-x_0)^n\triangleq c_{n_0}(x-x_0)^{n_0}g(x)$. $g(x_0)=1$ 且在 x_0 处连续. 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$

不可能以 x_0 为聚点. 矛盾. 故 $c_n\equiv0$. 即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $B(x_0,R')\cap(-R,R)$ 上为 0.

反复这么做即得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 上恒为 0 $\Rightarrow a_n\equiv0$.

Claim 的证明 (from 一位同学): $A_{ij}\triangleq a_{i+j}\binom{i+j}{i}(x-x_0)^ix_0^j$. 当 $|x-x_0|<\min\{x_0+R,R-x_0\}$ 时,

绝对值按对角线求和 // $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}|x-x_0|^i|x_0|^j=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|(\underbrace{|x-x_0|+|x_0|}_{\in(-R,R)})^n<+\infty$

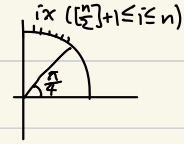
由习题 15.2.4 的证明 (第三次习题课讲义). $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}A_{ij}\right)=\sum\limits_{\substack{排列\\求和}}A_{ij}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0+x_0)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

即 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_{i+j}\binom{i+j}{i}x_0^j\right)(x-x_0)^i=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 即得所要的展开 □

15.2.19

必要性: 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 一致收敛. 则 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N$. $\forall n>2N$. $\left|\sum\limits_{i=[\frac{n}{2}]+1}^{n}b_i\sin ix\right|<\varepsilon$, $\forall x\in\mathbb{R}$

现取 $x=\frac{\pi}{2n}$. 则 $[\frac{n}{2}]+1\le i\le n$ 都有 $\frac{\pi}{4}\le ix\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin ix\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$



$\therefore\underbrace{\sum\limits_{i=[\frac{n}{2}]+1}^{n}\frac{\sqrt{2}}{2}b_i}_{\geq\,\frac{n}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}b_n}\le\left|\sum\limits_{i=[\frac{n}{2}]+1}^{n}b_i\sin ix\right|<\varepsilon\quad\Rightarrow nb_n<2\sqrt{2}\varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=0$

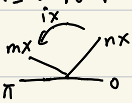
$b_i\searrow$

充分性：设$\varepsilon>0$. $\exists N$, $\forall n>N$ 有 $0\le nb_n<\varepsilon$

对 $m\ge n>N$, $S_{m,n}(x)\triangleq\sum_{i=n}^{m}b_i\sin ix$ 由 $S_{m,n}(2\pi-x)=-S_{m,n}(x)$, 只需对 $x\in[0,\pi]$ 验证

目标：对 $\forall m\ge n>N$ 和 $\forall x\in\mathbb{R}$, $|S_{m,n}|$ 都充分小（小于 ε 的常数倍）

① $0\le x\le\frac{\pi}{m}$ 时.



$|S_{m,n}|\overset{\sin t\le t\ (0\le t\le\pi)}{\le}\sum_{i=n}^{m}b_i\cdot ix\le\sum_{i=n}^{m}b_i\cdot i\cdot\frac{\pi}{m}\le\frac{\pi(m-n+1)}{m}\varepsilon<\pi\varepsilon$

② $\frac{\pi}{n}\le x\le\pi$ 时, 利用Abel求和公式, $S_{m,n}(x)=\Big(\underbrace{\sum_{i=n}^{m}\sin ix}_{|\cdot|\le\frac{2}{\sin\frac{x}{2}}}\Big)b_m+\sum_{k=1}^{m-n}\Big(\underbrace{\sum_{i=n}^{n+k-1}\sin ix}_{|\cdot|\le\frac{2}{\sin\frac{x}{2}}}\Big)(b_{n+k-1}-b_{n+k})$

$|S_{m,n}(x)|\le\frac{2}{\sin\frac{x}{2}}\Big(b_m+\sum_{k=1}^{m-n}(b_{n+k-1}-b_{n+k})\Big)=\frac{2}{\sin\frac{x}{2}}b_n\overset{(*)}{\le}2nb_n<2\varepsilon$

$(*)$: $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ 时 $\sin t\ge\frac{2}{\pi}t$

③ $\frac{\pi}{m}\le x\le\frac{\pi}{n}$ 时. 由①②启发, 取 l 使得 $\frac{\pi}{l+1}\le x\le\frac{\pi}{l}$. 将求和 $S_{m,n}(x)$ 分成两段 $S_{l,n}(x)+S_{m,l+1}(x)$

则可以对 $S_{l,n}(x)$ 用①, 对 $S_{m,l+1}(x)$ 用②. 得 $|S_{m,n}(x)|<\pi\varepsilon+2\varepsilon=(\pi+2)\varepsilon$

综上所述 $|S_{m,n}(x)|<(\pi+2)\varepsilon$, $\forall m>n>N$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 故原级数一致收敛 □

15.2.22 Claim: 任一有紧致支集的连续函数 g 必定有界、一致连续

Claim证明：设支集为 A. 由A紧, $\exists M>0$, $A\subset[-M,M]$

考虑 g 在 A 上的限制 $g|_A$, 它是一个新的函数: $A\longrightarrow\mathbb{R}$. 由于 g 连续, $g|_A$ 也连续:

$\underbrace{g|_A^{-1}(O)}_{\mathbb{R}\text{中开集}}=\underbrace{g^{-1}(O)}_{g\text{连续},\ \mathbb{R}\text{中开集}}\cap A$ 为 A 中开集 (回顾第二次习题课的内容)

$g|_A$ 为紧集上连续函数, 故有界. 这说明 g 也有界.

若 g 不一致连续, 即 $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall n$, $\exists\ |a_n-b_n|<\frac{1}{n}$, $|g(a_n)-g(b_n)|\ge\varepsilon_0$

由于 g 在 $[-M,M]^c$ 上均为0, $\therefore a_n,b_n\in[-M-1,M+1]$, $\forall n$ (想想为什么)

而 $g|_{[-M-1,M+1]}$ 也为紧集上连续函数, 它一致连续. 于是矛盾. 故 g 在$\mathbb{R}$上一致连续.

回到原题. f 有界且一致连续, 结合一致收敛知 $\{f_n\}$ 一致有界

给定$\varepsilon>0$. $\exists\delta_1>0$ s.t. $\forall|x_1-x_2|<\delta_1$ 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$

由一致收敛, $\exists N$, $\forall n>N$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$

$\Longrightarrow$ $\forall n>N$, $\forall|x_1-x_2|<\delta_1$, $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

对剩下有限个 f_n $(1\le n\le N)$, 存在 $\delta_2>0$, $\forall|x_1-x_2|<\delta_2$ 有 $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\varepsilon$ $(\forall 1\le n\le N)$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 即可 □

补充1

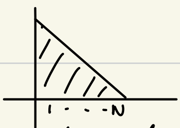
• 课上已讲过单位近似的概念，它也被称为 good kernel 或 approximation to idendity

它是一种"分配权重"的方式．下面讨论一些其他的方式（离散）

设数列为 $\{c_k\}_{k\geq 0}$ $s_n=\sum_{k=0}^{n} c_k$

Def 1. $\sigma_N=\frac{s_0+s_1+\cdots s_{N-1}}{N}$ 称为 Cesàro mean 或 N^{th} Cesàro sum

若 $\sigma_N \xrightarrow{N\to\infty} \sigma$，称 $\{c_k\}$ Cesàro 可和到 σ

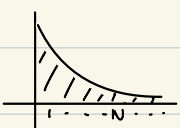


σ_N 关于 $\{c_k\}$ 的权重分配

例. $\{1,-1,1,-1,\cdots\}$. $\sigma_N \longrightarrow \frac{1}{2}$

Def 2. $A(r)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$ $(0\leq r<1)$ 称为 Abel mean

若 $\lim_{r\to 1} A(r)=s$，称 $\{c_k\}$ Abel 可和到 s

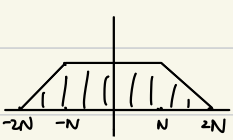


$A(r)$ 关于 $\{c_k\}$ 的权重分配

Remark 对 Fourier 级数也可定义 S_n、σ_n、A_r

它们分别由 f 对 Dirichlet 核、Fejer 核、Poisson 核卷积得到

Def 3. $\Delta_N(g)=2\sigma_{2N}(g)-\sigma_N(g)$ 称为 delayed mean



Δ_N 关于 $a_n e^{inx}$ 的权重分配

Δ_N 可用于分析 Weierstrass 函数 $f_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} e^{i2^n x}$ 的性质

主要结果：

a) $s_n\to s$，则 $\sigma_n\to s$

b) $s_n\to s$，则 $A(r)\xrightarrow{r\to 1} s$

c) $c_n=(-1)^n$ Abel可和但不可和

d) $\sigma_n\to\sigma$，则 $A(r)\xrightarrow{r\to 1}\sigma$

e) $\{c_n=(-1)^{n-1}n\}$ Abel可和但不是Cesàro可和

f) $\{c_k\}$ Cesàro可和到 σ，$c_n=o(\frac{1}{n})$，则 $s_n\to\sigma$

g) $\{c_k\}$ Abel可和到 σ，$c_n=o(\frac{1}{n})$，则 $s_n\to\sigma$

$$\begin{tikzcd} \text{可和} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Cesàro可和} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[l, bend left, "c_n=o(\frac{1}{n})"] & \text{Abel可和} \arrow[ll, bend right, "c_n=o(\frac{1}{n})"'] \end{tikzcd}$$

proof：只证一部分，剩下的是不错的练习

b) 不妨设 $s=0$ $(c_1\mapsto c_1-s)$

$$\sum_{n=1}^{N} c_n r^n=(1-r)\sum_{n=1}^{N} s_n r^n+s_N r^{N+1}$$

$$\xRightarrow{N\to\infty} A(r)=(1-r)\sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n$$

$\forall\varepsilon>0$，取 N，$n>N$ 时 $|s_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$，

取 r s.t. $(1-r)\sum_{n=0}^{N}|s_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$

则 $|A(r)|\le(1-r)\sum_{n=1}^{N}|s_n|+(1-r)\sum_{n>N}\frac{1}{2}\varepsilon\cdot r^n<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}r^{N+1}<\varepsilon$；

d) 不妨设 $\sigma=0$（想想为什么）

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n=(1-r)^2\sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n r^n$（仿照(b)去验证）

$\forall\varepsilon>0$，取 N，$n>N$ 时 $|\sigma_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

取 r s.t. $(1-r)^2\sum_{n=0}^{N} n|\sigma_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$

则 $|A(r)|\le(1-r)^2\sum_{n=0}^{N} n|\sigma_n|+(1-r)^2\sum_{n>N}\frac{\varepsilon}{2}nr^n$

$$<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}(1-r)^2 r\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}}_{(r+r^2+\cdots)'}=\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon r<\varepsilon$$；

f) $s_n-\sigma_n=\dfrac{(n-1)c_n+\cdots+c_2}{n}$

$\lim_{n\to\infty}(s_n-\sigma_n)\overset{\text{Stolz}}{=}\lim_{n\to\infty} n c_{n+1}=0$；

g) hint：估计 $\left|\sum_{n=1}^{N} c_n-\sum_{n=1}^{N} c_n r^n\right|$，其中 $r=1-\frac{1}{N}$ □

↑ 这即为2020年B3期中最后一题

补充2

• (2π周期 f) Fourier 级数的收敛 $\begin{cases} \text{点态：定理15.47、15.48} \\ \text{一致：定理15.49、15.50} \\ \text{平方平均：下次课} \end{cases}$ ☆ 我们现在重点讨论这一种

记号：$\hat{f}(n) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta \left(= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta - i\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta = \frac{a_n}{2} - i\cdot\frac{b_n}{2}\right)$

$$S_N(f)(x) \triangleq \sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx} = \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{N}\left(\hat{f}(n)e^{inx} + \hat{f}(-n)e^{-inx}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[\left(\frac{a_n}{2} - i\cdot\frac{b_n}{2}\right)(\cos nx + i\sin nx) + \left(\frac{a_n}{2} + i\cdot\frac{b_n}{2}\right)(\cos nx - i\cdot\sin nx)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$ 与书上定义一样

Thm 1. f 2π周期，在周期内可积，$\hat{f}(n)=0$ $(\forall n\in\mathbb{Z})$，则 f 在连续点 θ_0 处取值为 0

proof：反证. 由于周期性，平移/伸缩 不影响结论，不妨就设 $\theta_0=0$. $f(0)=1>0$

f 在0处连续 $\Rightarrow \exists\, 0<\delta\le\frac{\pi}{2}$ s.t. $f(\theta)>\frac{1}{2}$ $(-\delta<\theta<\delta)$

令 $p(\theta)=\varepsilon+\cos\theta$，其中 $\varepsilon>0$ 很小，使得 $\begin{cases} |p(\theta)|<1-\frac{\varepsilon}{2} & (\forall\, \delta\le|\theta|\le\pi) \\ p(\theta)\ge 0. & \forall|\theta|<\delta \end{cases}$

$\exists\, 0<\eta<\delta$ 使 $p(\theta)\ge 1+\frac{\varepsilon}{2}$，$\forall|\theta|<\eta$

令 $p_k(\theta)=[p(\theta)]^k$ $\begin{cases} \ge(1+\frac{\varepsilon}{2})^k. & |\theta|<\eta \\ \ge 0. & \eta\le|\theta|<\delta \\ \in B(0,(1-\frac{\varepsilon}{2})^k) & \delta\le|\theta|\le\pi \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \int_{|\theta|<\eta} f(\theta)p_k(\theta)d\theta \ge \frac{1}{2}\cdot(1+\frac{\varepsilon}{2})^k\cdot 2\eta \xrightarrow{k\to\infty} +\infty \\ \int_{\eta\le|\theta|<\delta} f(\theta)p_k(\theta)d\theta \ge 0 \\ \left|\int_{\delta\le|\theta|\le\pi} f(\theta)p_k(\theta)d\theta\right| \le 2\pi\cdot\sup_{[-\pi,\pi]}|f|\cdot(1-\frac{\varepsilon}{2})^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)p_k(\theta)d\theta \to +\infty$$

但 $p_k(\theta)$(通过积化和差)为一些 $\cos ix$、$\sin jx$ 的和. 由 $\hat{f}(n)\equiv 0$ 知 $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)p_k(\theta)d\theta \equiv 0$ $(\forall k)$

矛盾. 故结论得证 □

Rmk：这说明如果两个连续函数 f, g 的 Fourier 级数相同，即 $\widehat{(f-g)}(n)\equiv 0$，则 $f-g\equiv 0 \Rightarrow f=g$

☆ Cor2 (判定一致收敛的基本方法). f 2π周期,连续. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|<\infty$，则 $S_N(f)$ 一致收敛到 f

proof：Fourier 系数一致收敛 $\xRightarrow{\text{比较判别法}}$ $S_N(f)$ 一致收敛到连续函数，设收敛到 g

则 $\underset{\hat{f}(n)}{\underset{\|}{\widehat{S_N(f)}(n)}} \longrightarrow \hat{g}(n)$. 故 $\hat{f}(n)\equiv\hat{g}(n)$. 由 Thm 1 知 $f=g$. 即 $S_N(f)\rightrightarrows f$ □

于是我们的目标变成考虑 $\sum \hat{f}(n)$ 何时绝对收敛.

Thm 3. 2π 周期 $f\in C^k$ (i.e $f^{(k)}$ 连续), 则 $\hat{f}(n)=O(1/|n|^k)$ $(n\to\infty)$

proof: 以 $k=1$ 为例.

$$2\pi\hat{f}(n)=\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)e^{-in\theta}d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cdot\left(\frac{-e^{-in\theta}}{in}\right)'d\theta$$ (如果不习惯复数, 也可展开成实部虚部验证)

$$=\left(f(\theta)\cdot\frac{-e^{-in\theta}}{in}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi}f'(\theta)\cdot e^{-in\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi}f'(\theta)\cdot e^{-in\theta}d\theta$$. |积分号里的东西| $\leq \sup|f'|\cdot 2\pi$ 有界 □

Rmk. 取 $k=2$ 即得到 C^2 函数的 Fourier 级数一致收敛到自身, 即性质 15.49 前半句

下面的定理给出了更好的结果:

Thm 4. f: 2π 周期, 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, 满足 α 阶 Hölder 条件: $|f(x+h)-f(x)|\leq C|h|^{\alpha}$ $(0<\alpha\leq 1)$

则 $\hat{f}(n)=O(1/|n|^{\alpha})$

proof: 简单计算可知 $\hat{f}(n)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\pi/n)e^{-inx}dx$.

故 $\hat{f}(n)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})]e^{-inx}dx$. 利用 Hölder 条件立得 □

Example 5 (Thm 4 的估计是 sharp 的, 即这里无法被改进为更小的数)

考虑 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\alpha}e^{i2^kx}$ $(0<\alpha<1)$. f 满足 α 阶 Hölder 条件, 且 $N=2^k$ 时 $\hat{f}(N)=1/N^{\alpha}$

分析: $2^k\leq\frac{1}{|h|}$ 时 $|e^{i2^k(x+h)}-e^{i2^kx}|\leq 2^kh$ 很小.

$2^k>\frac{1}{|h|}$ 时 $2^{-k\alpha}$ 很小

proof: $$|f(x+h)-f(x)|\leq\left|\sum_{2^k\leq\frac{1}{|h|}}2^{-k\alpha}(e^{i2^k(x+h)}-e^{i2^kx})\right|+\left|\sum_{2^k>\frac{1}{|h|}}2^{-k\alpha}(e^{i2^k(x+h)}-e^{i2^kx})\right|$$

$$\leq\sum_{2^k\leq\frac{1}{|h|}}2^{-k\alpha}\cdot|e^{i2^kx}||e^{i2^kh}-1|+\sum_{2^k>\frac{1}{|h|}}2\cdot 2^{-k\alpha}$$

$$\leq\sum_{2^k\leq\frac{1}{|h|}}2^{-k\alpha}\cdot 2^kh+\sum_{2^k>\frac{1}{|h|}}2\cdot 2^{-k\alpha}\qquad (2^{k_0}\leq\tfrac{1}{|h|}<2^{k_0+1})$$

$$=h\cdot\frac{1-2^{(k_0+1)(1-\alpha)}}{1-2^{1-\alpha}}+2\cdot 2^{-(k_0+1)\alpha}\cdot\frac{1}{1-2^{-\alpha}}$$

$$\leq C(|h|+|h|^{\alpha})$$

$$\left.\begin{array}{l}|h|\text{ 小时 }|h|\leq C'|h|^{\alpha}\quad |f(x+h)-f(x)|\leq C''|h|^{\alpha}\\ |h|\text{ 大时由于 }f\text{ 有界, 也有 }|f(x+h)-f(x)|\leq M\leq C|h|^{\alpha}\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha\text{ 阶 Hölder 条件}$$

$$\hat{f}(2^{k_0})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\alpha}e^{i2^kx}\cdot e^{-i2^{k_0}x}dx=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(2^k-2^{k_0})x}dx$$

只有 $k=k_0$ 时不为0 $2^{-k_0\alpha}=1/(2^{k_0})^{\alpha}$ □

Thm 4 没有告诉我们 $\alpha=1$ 时 Fourier级数是否(绝对/一致)收敛，下面的例子说明这是对的，且还可以加强：

Example 6

(a) 设 f 2π周期，满足1阶 Hölder条件：$|f(x)-f(y)| \le K|x-y|$ $(\forall x,y)$

(a.1) $\forall h\in\mathbb{R}_+$，$g_h(x) \triangleq f(x+h)-f(x-h)$.

证明 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_h(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}4|\sin nh|^2|\hat{f}(n)|^2$，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\sin nh|^2|\hat{f}(n)|^2\le K^2h^2$

(a.2) $p\in\mathbb{N}$. 选取 $h=\frac{\pi}{2^{p+1}}$ 以证明 $\sum_{2^{p-1}<|n|\le 2^p}|\hat{f}(n)|^2 \le \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}$

(a.3) 估计 $\sum_{2^{p-1}<|n|\le2^p}|\hat{f}(n)|$，证明 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)$ 绝对收敛，进而 Fourier 级数一致收敛

(b) 适当修改以上论证，并证明 Bernstein's theorem：

若 f 满足 α 阶 Hölder 条件，$\alpha>\frac{1}{2}$，则 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)$ 绝对收敛 ($\Rightarrow$ Fourier级数一致收敛)

proof: (a.1) $\hat{g}_h(n) = e^{inh}\hat{f}(n) - e^{-inh}\hat{f}(n) = 2i\sin nh\,\hat{f}(n)$.

由 Parseval 等式立得

(a.2) 利用 (a.1)

(a.3) $(2^{\frac{2}{3}p}\hat{f}(n))^2 + 2^{-(\frac{4}{3}p+2)} \ge \hat{f}(n)$ (Cauchy 不等式)

从而 $\sum_{2^{p-1}<|n|\le2^p}|\hat{f}(n)| \le 2^{\frac{4}{3}p}\sum_{2^{p-1}<|n|\le2^p}|\hat{f}(n)|^2 + 2^{-(\frac{4}{3}p+2)}\,2^p$

$\overset{(a.2)}{\le} K^2\pi^2 2^{-(\frac{2}{3}p+1)} + 2^{-(\frac{p}{3}+2)}$

对 $p\in\mathbb{N}$ 求和，$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|<\infty$

(b) (a.3)的证明核心是使这两个系数都变成负的，我们试图把这一方法用到极致

这就需要在 Cauchy不等式中选取最合适的系数

设系数已改为 $(2^{\beta p}\hat{f}(n))^2 + 2^{-(2\beta p+2)} \ge \hat{f}(n)$

此时(a.1)已改为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\sin nh|^2|\hat{f}(n)|^2 \le K^2h^{2\alpha}$，(a.2)已改为 $\sum_{2^{p-1}<|n|\le 2^p}|\hat{f}(n)|^2\le K^2\pi^2 2^{-2\alpha(p+1)+1}$

有 $\sum_{2^{p-1}<|n|\le2^p}|\hat{f}(n)| \overset{(a.2)}{\le} K^2\pi^2\, 2^{2\beta p-2\alpha(p+1)+1} + 2^{-2\beta p-2+p}$

此时需要 $\begin{cases}2\beta-2\alpha<0\\ -2\beta+1<0\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}<\beta<\alpha$. 由于 $\alpha>\frac{1}{2}$，必存在，从而 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|<\infty$，定理得证 □