第五次习题课讲义

常运航

1 第八周作业

作业 1.1 (课本 15.3.4) 证明：若 f 和 g 在 $\mathbb{R}$ 上连续且 f 在一个有限区间外为零，则 $f*g$ 连续

证明. 设 f 在 $[a,b]$ 之外为零，我们有

$$|f*g(x)-f*g(y)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[g(x-t)-g(y-t)]\,dt| \le \int_a^b |f(t)||g(x-t)-g(y-t)|\,dt$$

再由有界区间上连续函数有界以及一致收敛得，y 趋于 x 时，上式趋于 0，$f*g$ 连续得证。

作业 1.2 (课本 15.3.10) 设 f 为 $[-1,1]$ 上的连续偶函数，证明：若

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^{2k}\,dx = 0$$

则 $f\equiv 0$。

证明. 题设即为 f 和任意多项式乘积积分后都为 0，设有多项式 P_n 一致收敛到 f，$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx = 0$，取极限得 $\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx = 0$，也即 $f\equiv 0$。

作业 1.3 (课本 15.3.11) 设在区间 $[a,b]$ 上多项式列 P_n 一致收敛到函数 f，且 P_n 的次数不超过 N，证明：f 也是次数不超过 N 的多项式。

证明. 可设 $[a,b]$ 为 $[0,1]$，$\int_0^1 h_k(x)x^j\,dx=\delta_{kj}$，设 $h_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n^{(k)}x^n$ 也是多项式，代入可解得 $a_n^{(k)}$（其实由线性代数可计算得系数行列式不为 0），现在考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b h_k(x)P_n(x)\,dx=\int_a^b h_k(x)f(x)\,dx$ 即 P_n 的各项系数都收敛，即 P_n 收敛到一个次数不超过 N 的多项式，由收敛唯一性得 f 是次数不超过 N 的多项式。

作业 1.4 (课本 15.3.14) 设 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，且 $g(x)\geq 0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,dx=1$，证明 $g_n(x)=ng(nx),n=1,2,3,\ldots$ 为单位近似。

证明. 前两个条件易知满足，对第三个条件，$\forall\delta>0,\int_{|x|>\delta}ng(nx)\,dx=\int_{|x|>n\delta}g(x)\,dx\to 0$，证毕。

作业 1.5 (课本 15.4.1) 证明：存在常数 $c>0$ 使得

$$\int_{-\pi}^{+\pi}|D_n(t)|\,dt\geq c(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\geq c\ln n$$

证明.

$$\int_{-\pi}^{+\pi}|D_n(t)|\,dt=\int_0^{\pi}|\frac{\sin(n+\frac{1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}|\,dt\geq\int_0^{\frac{n\pi}{n+\frac{1}{2}}}|\frac{\sin(n+\frac{1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}|\,dt$$

将区间按提示分解

$$\int_{\frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(k+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}}|\frac{\sin(n+\frac{1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}|\,dt\geq\int_{\frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(k+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}}|\frac{\sin(n+\frac{1}{2}t)}{\sin(\frac{(k+1)\pi}{2(n+\frac{1}{2})})}|\,dt\geq\frac{2(n+\frac{1}{2})}{(k+1)\pi}\frac{2}{n+\frac{1}{2}}=\frac{4}{(k+1)\pi}$$

故取 $c=4/\pi$ 即可。

作业 1.6 (课本 15.4.2) 设 f 连续且 $f'(x_0)$ 存在，证明 $S_nf(x_0)\to f(x_0)(n\to\infty)$

证明.

$$S_nf(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_n(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})\,dt$$

从而我们有

$$S_n f(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)-2f(x_0)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})\,dt$$

由 f 在 x_0 处可微，$f(x_0\pm t)-f(x_0)=\pm tf'(x_0)+o(t)$，由定理 15.47 及 Riemann-Lebesgue 引理知上式趋于 0，证毕。

作业 1.7 (课本 15.4.4) 设 f 在点 x_0 之外都连续且 x_0 是跳跃间断点，证明 $\sigma_n f(x_0) \to [\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)]/2$

证明. 将 f 在 x_0 左右两端上下平移得到一个连续函数 g，

$$\begin{aligned} f(x_0) = g(x_0) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x_0-t)K_n(t)\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x_0-t)+f(x_0)-\lim_{x\to x_0^+}]K_n(t)\,dt \\ &+ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x_0-t)+f(x_0)-\lim_{x\to x_0^-}]K_n(t)\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\sigma_n f(x_0) - [\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)]/2 + f(x_0) \end{aligned}$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n f(x_0) = [\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)]/2$