第一次习题课讲义

常运航

1 第六周作业

作业 1.1 (课本 15.1.11) 设 f 是定义在有界开区间 (a,b) 上的连续函数，证明：f 一致连续当且仅当 f 在 a 的右极限和 b 的左极限都存在。

证明. $\Leftarrow$：左极限和右极限都存在时，f 可以延拓定义到 $[a,b]$ 上连续（类比 14 题），故一致连续。

$\Rightarrow$：设 $x_n \in (a,b)$ 单调趋近于 a，先证明 $f(x_n)$ 是一个 Cauchy 列，再证明这个极限一定是 a 处的右极限，另外一边同理

作业 1.2 (课本 15.1.20) 设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的函数，对任意 $\delta > 0$，证明：函数 f 的振幅大于或等于 δ 的点集 $D_\delta = \{x \in [a,b] | \omega_f(x) \geq \delta\}$ 是闭集。

证明. 反证，设 $x_0 \in [a,b] \backslash D_\delta$，$x_0$ 是 D_δ 的聚点，由假设

$$\omega_f(x_0) = \lim_{p \to 0} \sup_{x,y \in (x_0 - p, x_0 + p)} |f(x) - f(y)| < \delta \tag{1}$$

从而有 p_0

$$\sup_{x,y \in (x_0 - p_0, x_0 + p_0)} |f(x) - f(y)| < \delta \tag{2}$$

又 x_0 是 D_δ 的聚点 $\Rightarrow$，$\exists x_1 \neq x_0, x_1 \in (x_0 - p_0, x_0 + p_0)$ 使得 $\omega_f(x_1) \geq \delta$，找 x_1 的一个开邻域 $(x_1 - p_1, x_1 + p_1)$ 包含在 $(x_0 - p_0, x_0 + p_0)$ 中，有 $\sup_{x,y \in (x_1 - p_1, x_1 + p_1)} |f(x) - f(y)| \geq \delta$ 得到矛盾。故 D_δ 是闭集。

作业 1.3 (课本 15.1.22) 设 f,g 是 D 上的一致连续函数，并且它们有界，证明 fg 一致连续，举反例说明有界性是必要的。

证明. 设 $|f(x)|<M,|g(x)|<M$，$\forall\varepsilon,\exists\delta,\forall x,y,|x-y|<\delta,|f(x)-f(y)|<\varepsilon/M,|g(x)-g(y)|<\varepsilon/M$，从而我们有 $\forall x,y,|x-y|<\delta,|f(x)g(x)-f(y)g(y)|\le|f(x)g(x)-f(x)g(y)|+|f(y)g(y)-f(x)g(y)|<M|f(x)-f(y)|+M|g(x)-g(y)|<2\varepsilon$ 成立。

作业 1.4 (课本 15.1.25) 证明 Riemann 函数在任意点的极限为 0

证明. $\forall\varepsilon>0,R(x)>\varepsilon$ 的点只有有限个，因此总可以取 x 的一个足够小的去心开邻域使得里面的函数值都小于 ε。

作业 1.5 (课本 15.1.27) 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上单调增，$x_1<x_2<\ldots$ 是 f 的间断点，定义 $[a,b]$ 上的函数 $h(x)$ 如下：$h(a)=0$，当 $x>a$ 时有

$$h(x)=[f(a+0)-f(a)]+\sum_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+[f(x)-f(x-0)] \quad (3)$$

证明 $h(x)$ 是单调增函数，$g(x)=f(x)-h(x)$ 连续。

证明. $x_i<x<x_{i+1}$ 时，$h(x)=[f(a+0)-f(a)]+\sum\limits_{k=1}^{i}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]$ 是常值函数，且随 i 的增大而增大。而 $h(x_i-0)<h(x_i)<h(x_i+0)$，故 $h(x)$ 是单调增函数。

$x_i<x<x_{i+1}$ 时，$f(x),h(x)$ 均连续，故 $g(x)$ 连续。$x=x_i$ 时，$g(x_i+0)=f(x_i+0)-[f(a+0)-f(a)+\sum\limits_{k=1}^{i}(f(x_k+0)-f(x_k-0))]=f(x_i-0)-[\sum\limits_{k=1}^{i-1}(f(x_k+0)-f(x_k-0))]=g(x_i-0)=g(x_i)$ 故连续。

作业 1.6 (课本 15.2.2) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为每项都为正的收敛级数，证明：存在绝对收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0 \quad (4)$$

证明. 记 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i, \beta_n=S-S_{n-1}$，构造 $b_n=\sqrt{\beta_n}-\sqrt{\beta_{n+1}}>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}b_i=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\beta_1}-\sqrt{\beta_{n+1}})=\sqrt{\beta_1} \tag{5}$$

绝对收敛，此时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n(\sqrt{\beta_n}+\sqrt{\beta_{n+1}})}{\beta_n-\beta_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\beta_n}+\sqrt{\beta_{n+1}})=0 \tag{6}$$

作业 1.7 (课本 15.2.3) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛

证明. 原式等于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\sum\limits_{i=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{1}{i})$，而

$$\sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{1}{i}-\sum_{i=(k+1)^2}^{(k+2)^2-1}\frac{1}{i} \tag{7}$$

$$=\frac{2k+1}{k^2(k^2+2k+1)}+\cdots+\frac{2k+1}{(k^2+2k)(k^2+4k+1)}-\frac{1}{k^2+4k+2}-\frac{1}{k^2+4k+3} \tag{8}$$

$$\geq\frac{(2k+1)^2}{(k^2+2k)(k^2+4k+1)}-\frac{2}{k^2+4k+2}>0 \tag{9}$$

两个求和逐项配对。当 n 足够大时，$\sum\limits_{i=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{1}{i}$ 随 k 单调递减，由交错级数知原级数收敛。

作业 1.8 (课本 15.2.4) 设 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{mn}|)<\infty$，证明：

(1) 可数集合 $\{a_{mn}|m,n\in\mathbb{N}\}$ 的任意排列求和均收敛;(2) $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{mn})$

证明. (1) 由题意可证得任意排列求和其实都是绝对收敛的;

(2) 取教材 P72 第一段中定义的 $a_{mn}^{\pm}=\frac{|a_{mn}|\pm a_{mn}}{2}$，由题设知 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{mn}^{+}+a_{mn}^{-})<\infty$。可以将原式分解为 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn})=\sum\limits_{m=1}^{\infty}(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}^{+})-\sum\limits_{m=1}^{\infty}(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}^{-})$，因此我们只需要证明 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}^{+})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{mn}^{+})$ 即可。又 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}^{+})\geq\sum\limits_{m=1}^{\infty}(\sum\limits_{n=1}^{k}a_{mn}^{+})=\sum\limits_{n=1}^{k}(\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{mn}^{+})$，$k$ 取极限得到 $LHS\geq RHS$，同理我们也有 $RHS\geq LHS$ 得证。