第一次习题课讲义

常运航

1 第一二周作业

作业 1.1 (课本 14.1.3) 写出如下命题的否定：存在 N，使得任意正偶数都能表示成不超过 N 个素数的和。

证明. 解答略，注意任意和存在的否定即可。

作业 1.2 (课本 14.1.5) 利用量词规则表述区间上函数的一致连续性以及否命题。

证明. 回忆 B1 中的定义：

$$\text{原命题 } \forall \varepsilon, \exists \delta, \forall x, y \in [a,b], |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

$$\text{否命题 } \exists \varepsilon, \forall \delta, \exists x, y \in [a,b], |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$$

作业 1.3 (课本 14.1.7) $\mathbb{N}$ 的有限子集构成的集合是可数集合还是不可数集合？证明你的答案。

证明. 是可数集合。将这些子集按包含元素的个数分类，总共可数种，每种都只有可数个子集，可数个可数集的并仍然是可数的。

作业 1.4 (课本 14.1.8) 证明：有理数集合 $\mathbb{Q}$ 是可数集合。

证明. 按照提示，将 $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ 写成集合 $\mathbb{Q}_k = \{\pm j/k | j \in \mathbb{N}\}(k \in \mathbb{N})$ 的并，这里面每个集合都是可数的，并起来当然是可数的。

作业 1.5 (课本 14.1.9) 证明：一个不可数集合里一个可数子集合的余集仍是不可数集合。

证明. 反证法。若可数的话把这两个集合并起来原来的集合就可数了。

作业 1.6 (课本 14.1.10) 证明：可数个可数集合的直积是不可数集合。

证明. 注意区分直积和并两种运算。下面我们仿照 $2^{\mathbb{N}}$ 是不可数集合的证明。设这些可数集合 $A^j = \{a_i^j\}_{i=1}^{\infty}$，$A = \prod_{j=1}^{\infty} A^j$，假设 A 是可数集合，将所有的元素排成一排，下面构造一个元素一定不在这个排列里。设 $c = (c_i)_{i=1}^{\infty} = (c_1, c_2, \dots)$，取 c_i 不同于这一排第 i 个元素的第 i 个分量，可以得到 c 与这一排的所有元素都不可能相等。

上面的证明没有用到书上的提示直接给出了反例的选取，如果考虑提示会更加直观。设 $B^j = \{0^j, 1^j\}$ 是 A^j 的子集，$B = \prod_{j=1}^{\infty} B^j$，$B$ 是 A 的子集，只要证明 B 不可数 A 自然就不可数（思考一下为什么）。我们依然利用反证法，假设 B 可数，比方说将其排成一排（这个是随便排的方便举例子）：

$$(1,0,0,0,\dots)(1,0,0,0,\dots)(1,0,1,0,\dots)(0,1,1,1,\dots)\dots \tag{1}$$

那我们反例中的 c 就应该取 $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0, c_4 = 0$ 以此类推，与这一排第 i 个元素的第 i 个分量不同即可。

作业 1.7 (课本 14.2.6) 一个正有理数 Cauchy 列能与一个负有理数 Cauchy 列等价吗？

证明. 当然是可以的，比如 $\{\frac{1}{n}\}$ 就和 $\{-\frac{1}{n}\}$ 等价。

作业 1.8 (课本 14.2.7) 证明：代表一个实数的的有理数 Cauchy 列的集合是不可数集合。

证明. 由下面的 9 知我们可以只考虑等价到 0 的 Cauchy 列。取 $\mathbb{Q}_n = [-1/n, 1/n] \cap \mathbb{Q}$，可知 $\mathbb{Q}_n$ 可数，而由 14.1.10 知 $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_n$ 不可数。我们可

以自然地构造一个从 $\prod_{n=1}^{\infty}\mathbb{Q}_n$ 到等价到 0 的 Cauchy 列的一个单射，从而这个 Cauchy 列的集合不可数。

作业 1.9 (课本 14.2.9) 设代表两个实数 x, y 的有理数 Cauchy 列的集合分别为 A, B。证明：A, B 具有相同的基数。

证明. 只要构造 A 到 B 的一个双射即可。设代表 x, y 的某一个 Cauchy 列为 $\{x_n\}, \{y_n\}$，对任意代表 x 的 Cauchy 列 $\{a_n\}$，构造 $f(\{a_n\}) = \{a_n + y_n - x_n\}$ 即可。（需要证明一下这个和 y 等价以及 f 为双射）

作业 1.10 (课本 14.2.11) 设 x 为实数，证明：存在一个代表 x 的有理数 Cauchy 列，使得对所有 n，$x_n < x_{n+1}$。

证明. 思路 1：一个自然的想法就是用十进制小数来逼近。当 x 本身就是有限位小数时构造 $\{x - \frac{1}{n}\}$ 即可，否则就可以对 x 取小数前 n 位截断。（严格的证明留作练习）

思路 2：（由沈助教提供）

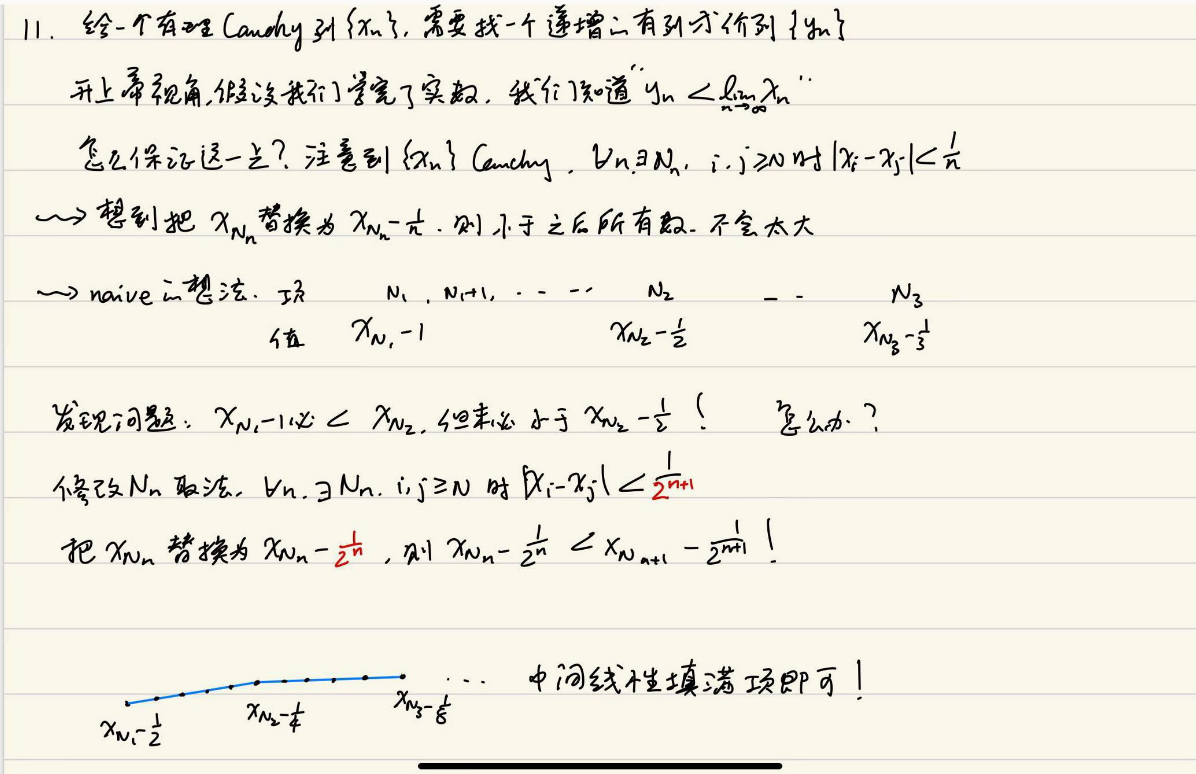

图 1: 思路 2

作业 1.11 (课本 14.2.13) 设 x 为正实数，证明：存在一个代表 x 的有理数 Cauchy 列，它的每一项都可以表示为 p^2/q^2，其中 p,q 为整数。

证明. 对 x，选取 $p_1,q_1\in\mathbb{Z}$ 使得

$$(\frac{p_1-1}{q_1})^2<x<(\frac{p_1}{q_1})^2$$

令 $\Delta_1=(p_1/q_1)^2-((p_1-1)/q_1)^2=(2p_1-1)/q_1^2$，$q_n=nq_1$，选取 p_n 依然满足上式，可以见到 $p_n\le np_1$。从而有 $\Delta_n\le\Delta_1/n$，这就是所求的 Cauchy 列。

作业 1.12 (课本 14.3.1) 证明：每个实数有唯一的实立方根。

证明. 仿照书本例 14.3.1 的二分法构造即可。

作业 1.13 (课本 14.3.2) 设 $\{x_n\}$ 是满足 $|x_n|\le 1/2^n$ 的实数列，设 $y_n=x_1+\cdots+x_n$。证明：数列 $\{y_n\}$ 收敛。

证明. 直接说明一下 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列，放缩即可。

作业 1.14 (课本 14.3.6) 设一个有界数列 $\{x_n\}$ 是一个单调增数列 $\{y_n\}$ 与单调减数列 $\{z_n\}$ 的和，问 $\{x_n\}$ 收敛吗？如果再假设 $\{y_n\},\{z_n\}$ 有界呢？

证明. 第一问显然不正确，反例可构造为 $\{y_n\}=\{3n\},\{z_n\}=\{-3n+(-1)^n\}(n\in\mathbb{N})$。假设二者有界时，两数列必然有极限，可以证明 $\{x_n\}$ 的极限就是两个极限的和（证明留作练习）。

作业 1.15 (课本 14.3.7) 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集，且 y 是两个数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 的共同极限，其中 $x_n\in E$，y_n 是 E 的上界。证明：$y=\sup E$。

证明. $\forall x\in E,\forall n,y_n\ge x\Rightarrow\lim_{n\to\infty}y_n=y\ge x$，即 y 也是 E 的一个上界。设 $\exists y'<y$ 也是一个上界，记 $y-y'=\varepsilon$，对此 ε，$\exists N,n>N$ 时有 $|x_n-y|<\varepsilon$，从而 $x_n>y'$ 矛盾。

作业 1.16 (课本 14.3.9) 是否存在一个数列，它的极限点集合恰好为 $1,1/2,1/3,\ldots$。

证明. 不存在，可以证明 0 一定也是这个数列的极限点。

作业 1.17 (课本 14.3.17) 证明：数列 $\{x_j\},\{y_j\}$ 的混合数列 $x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots$ 的极限点集合是两个原数列极限点集合的并。

证明. 易知后者一定是前者的子集，只要说明混合数列不会产生新的极限点即可。对混合数列的任何收敛子列，其中一定有 $\{x_n\}$ 或 $\{y_n\}$ 的中无限项，因此这个收敛到的极限点一定还属于原来的两个极限点集合中。

作业 1.18 (课本 14.3.21) 设 $\{x_n\}$ 是单调递减的正数列，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛。设 P 表示从级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 中任意抽取有限或无限项求和所得数的全体。证明：P 是一个区间当且仅当对任意 n 有

$$x_n \geq \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j$$

.

证明. 由题意知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$。

"$\Leftarrow$"：当 $x_n \leq \sum\limits_{j=n+1}^{\infty} x_j, \forall n>0$ 时，证明 $P=(0,\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n]$。

$\forall a \in (0,\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n)$，设 a 不能写成有限项之和。取 $x_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$，$\exists x_{i_1}, i_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $x_{i_1} < a < x_{i_1-1}$。

又 $x_{i_1} + \sum\limits_{j=i_1+1}^{\infty} x_j \geq x_{i_1-1} \Rightarrow x_{i_1} < a < x_{i_1} + \sum\limits_{j=i_1+1}^{\infty} x_j$。

$\exists x_{i_2}$ 使得 $x_{i_1}+x_{i_2} < a < x_{i_1}+x_{i_2-1}, i_2 > i_1$。

又 $x_{i_2} + \sum\limits_{j=i_2+1}^{\infty} x_j \geq x_{i_2-1} \Rightarrow x_{i_1}+x_{i_2} < a < x_{i_1}+x_{i_2}+\sum\limits_{j=i_2+1}^{\infty} x_j$。

如此构造数列 $\{x_{i_n}\}$，由 $\forall \varepsilon>0, \exists N, i_N > N, |\sum\limits_{j=i_N+1}^{\infty} x_j| < \varepsilon$ 可以得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{i_n} = a$。

”$\Rightarrow$ ”：反证，设 $\exists n, x_n > \sum\limits_{j=n+1}^{\infty} x_j$，取 $a \in (\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} x_j, x_n)$，知 a 不能被写成 $\{x_n\}$ 的有限或无限项之和，与 P 是一个区间矛盾。