第一章 测度论

差集 $E-F=\{x\in R^d,\ x\in E,\ x\notin F\}$.

集合距离 $d(E,F)=\inf\limits_{x\in E,\ y\in F}|x-y|$

开球 $B_r(x)=\{y\in R^d \mid |y-x|<r\}$

E是开集. 若 $\forall x\in E$, $\exists r>0$ 使 $B_r(x)\subset E$

E是闭集. 若 E^c 开

E是有界集 $\exists M>0$ $E\subset B_M(0)$

E是紧集. 有界闭集

$x\in R^d$ 是E的极限点. 若 $\forall r>0$ $(B_r(x)\setminus\{x\})\cap E\neq\phi$

$x\in R^d$ 是E的孤立点 $\exists r>0$ $B_r(x)\cap E=\{x\}$.

$x\in R^d$ 称为E的内点. $\exists r>0$ $B_r(x)\subset E$ E° 内部

E的闭包 $\bar{E}$ 是E与所有极限点的并

E的边界 $\partial E=\bar{E}-E^\circ$

E称为完全集 若E闭且没有孤立点.

定义(方体) n个区间(开闭或半开半闭) A_i 的乘积 $R=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$

$A_i(a_i,b_i)$ 方体体积 $|R|=(b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n)$

方体 R_1, R_2 几乎不交 (almost disjoint) 若 $R_1^\circ\cap R_2^\circ=\phi$

引理. 若方体R是有限个几乎不交的方体的并 $R=\bigcup_{j=1}^N R_j$ 则 $|R|=\sum|R_j|$

引理. 若 $R, R_1\cdots R_N$ 方体 且 $R\subset\bigcup_{j=1}^N R_j$ 则 $|R|\le\sum_{j=1}^N|R_j|$

定理. $\mathbb{R}$上任何开集$\mathcal{O}$是可数个互不相交的开区间的并. (包括 $(a,+\infty)$)

证 ① $\forall x\in\mathcal{O}$. 定义 $a_x=\inf\{a\mid (a,x)\subset\mathcal{O}\}$ $b_x=\sup\{b\mid (x,b)\subset\mathcal{O}\}$

故 $a_x<x<b_x$ 记 $I_x=(a_x,b_x)$. $x\in I_x$. $I_x\subset\mathcal{O}$ $\mathcal{O}=\bigcup_{x\in\mathcal{O}}I_x$.

② 若 $I_x\cap I_y\neq\phi$ 则 $I_x=I_y$.

No.

Date. / /

原因 若 $I_x \cap I_y \neq \phi$，则 $I_x \cup I_y$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间 $x \in I_x \cup I_y$

故由 I_x 的定义 $I_x \cup I_y \subset I_x$ 同理 $I_x \cap I_y \subset I_y \Rightarrow I_x = I_y$

$I = \{I_x\}_{x \in O}$ 中任何两个不同区间的交是空集

每个 I_x 中包含一个有理数 故 I_x 的个数是可数的

定理. $\mathbb{R}^d$ 中任何开集可写为可数个几乎不交的闭方体的并

证. 设 $d=2$ 设 $G \subset \mathbb{R}^2$ 开

① 第一类方体 $\{[n, n+1] \times [m, m+1]\}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ 完全包含在 G 中

② 第二类方体 $\{[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}] \times [\frac{m}{2}, \frac{m+1}{2}]\}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$

完全包含在 G 中且不包含在第一类方体中

ⓝ 第 k 类方体 $\{[\frac{n}{2^{k-1}}, \frac{n+1}{2^{k-1}}] \times [\frac{m}{2^{k-1}}, \frac{m+1}{2^{k-1}}]\}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ ...

完全包含在 G 中且不包含在前 $k-1$ 类中

至多可数个. 几乎不交. 且包含在 G 中. 只要证它们的并为 G

设 $(x,y) \in G$. $\exists \delta > 0$. $B_\delta((x,y)) \subset G$

取 $k \in \mathbb{N}$. $2^{-(k-2)} < \delta$. 则存在唯一的 m, n. $(x,y) \in [\frac{m}{2^{k-1}}, \frac{m+1}{2^{k-1}}) \times [\frac{n}{2^{k-1}}, \frac{n+1}{2^{k-1}}) = U$

U 中任何点到 (x,y) 的距离 $< \frac{\sqrt{2}}{2^{k-1}} < \frac{1}{2^{k-2}} \Rightarrow U \subset B_\delta(x,y) \subset G$

若 $\bar{U}$ 不包含在前 $k-1$ 类. 则它一定是 k 类.

Contor 集

定义 将 $C_0 = [0,1]$ 三等分去掉 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 剩下 $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. 2个长 $\frac{1}{3}$ 的区间

$\cdots$ C_n 2^n 个长 $\frac{1}{3^n}$ 的区间

令 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. C 称为 Contor 集

性质. ① C 非空. (所有 C_n 端点在 C 中

② C 闭 (C_n 闭)

③ C 有界

④ C 中无内点.

原因 设 $x \in C$ $\forall \varepsilon > 0$ 取 n. 使 $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ 不能包含在 C_n 中

No.
Date.　/　/

⑤ 去掉区间的总长为 1

⑥ C 是完全集（即 C 无孤立点）

设 $x\in C$. 则 $x\in C_n\ (\forall n)$ $\forall \varepsilon>0$ 取 $n.\ \frac{1}{3^n}<\varepsilon$ 故 x 属于 C_n 中某长为 $\frac{1}{3^n}$ 的区间 I

则 $I\subset(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$. 由于 I 的两个端点属于 C 且至少有一个不是 x

则 $C\cap\ (B_\varepsilon(x)\setminus\{x\})\neq\phi$

⑦ C 具有连续基数

[0,1] 中任一数可写为 $x=(0.a_1a_2\cdots)_3=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}\cdots$ $a_i\in\{0.1.2\}$ 有无穷项仟 2

当 $a_1=0$ 时. $x<\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}\cdots=\frac{1}{3}$

当 $a_1=1$ 时. $x\geq\frac{1}{3}$ 且 $x<\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots=\frac{2}{3}$

当 $a_1=2$ 时 $x\geq\frac{2}{3}$

$a_1=1$ 当且仅当 $x\in[\frac{1}{3}.\frac{2}{3})$. $a_1\neq1$ 则 $x\notin(\frac{1}{3}.\frac{2}{3})$

$a_k\neq1$. 则 $x\notin$ 第 k 步中去掉的区间

一般若 $\forall k\in\mathbb{N}$. $a_k\neq1$ 则 $x=(0.a_1a_2\cdots)_3\in C$

定义 $x=(0.b_1b_2\cdots)_2\ \xrightarrow{f}\ y=(0.a_1a_2\cdots)_3$

其中 $a_i=2b_i$

问题 能否将"体积"定义到一般集合上. 满足

① 非负 $m(E)\geq1$

② 可数可加性 E_i 两两不交 $m(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i)$

③ $m([0,1])=1$

想法：用方体"逼近"定义体积.

定义 设 $E\subset\mathbb{R}^d$ 定义 $m_*(E)=\inf\{\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|\ \{Q_j\}$ 为 E 的闭方体覆盖$\}$

注明 ① $0\leq m_*(E)\leq\infty$

② "可数并"不能改为"有限并"

③ "闭方体"可改为"开方体"

Wengu 文谷

No.
Date.　/　/

例. 可数集的外测度为0

设 $E=\{a_1,a_2\cdots\}$ 定义 $I_k=[a_k-\frac{\varepsilon}{2^{k+1}},a_k+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}]$

故 $\{I_k\}$ 是E的闭方体覆盖

$m_*(E)\le\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon$

故 $m_*(E)=0$

例. 若Q是 $\mathbb{R}^d$ 中的闭方体，则 $m_*(Q)=|Q|$

证. 由定义 $m_*(Q)\le|Q|$

设 $Q\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j$ $\{Q_j\}$ 是一列闭方体

存在一列开方体 S_j $S_j\supset Q_j$ $|S_j|=|Q_j|(1+\varepsilon)$

$Q\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}S_j$ 故存在有限个方体 $\{S_j\}_{j=1}^{N}$ 使 $Q\subset\bigcup_{j=1}^{N}S_j$

故 $|Q|\le\sum_{j=1}^{N}|S_j|\le\sum_{j=1}^{N}|Q_j|(1+\varepsilon)\le(1+\varepsilon)\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|$

取下确界 $|Q|\le(1+\varepsilon)m_*(Q)$ 由ε任意性

$|Q|\le m_*(Q)$ $\Rightarrow$ $|Q|=m_*(Q)$

例 若Q是 $\mathbb{R}^d$ 中开方体. 则 $m_*(Q)=|Q|$

证. 由定义 $\bar{Q}$ 是Q的闭方体覆盖 $m_*(Q)\le|\bar{Q}|=|Q|$

设 Q_0 是Q的一个闭方体.

$|Q_0|=m_*(Q_0)\le m_*(Q)$ (由定义易得此单调性

$Q_0\to Q$ $\Rightarrow$ $|Q|\le m_*(Q)$

$\Rightarrow$ $m_*(Q)=|Q|$

例 Cantor集的外测度

$C\subset C_n$ C_n 是 2^n 个长为 $\frac{1}{3^n}$ 的区间的并.

$m_*(C)\le m_*(C_n)=(\frac{2}{3})^n$

$\Rightarrow$ $m_*(C)=0$

No.
Date.

性质 s.t. $\forall \varepsilon>0$. $\exists$ 闭方体 $\{Q_j\}$ $E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j$ 且 $\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|\le m_*(E)+\varepsilon$

(1) 单调性. 若 $E_1\subset E_2$ 则 $m_*(E_1)\le m_*(E_2)$

(2) 可数次可加性. 设 $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$ 则 $m_*(E)\le\sum_{j=1}^{\infty}m_*(E_j)$

证. $\forall j$. $E_j\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_{kj}$ Q_{kj} 闭方体. 且 $\sum_{k=1}^{\infty}|Q_{kj}|\le m_*(E_j)+\varepsilon/2^j$

故 $E\subset\bigcup_{k,j}Q_{kj}$ 故 $m_*(E)\le\sum_{j,k}|Q_{kj}|\le\sum_{j=1}^{\infty}\left(m_*(E_j)+\frac{\varepsilon}{2^j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}m_*(E_j)+\varepsilon$

(3) $m_*(E)=\inf\{m_*(Q)\ Q\supset E.\ Q$ 开$\}$ 开集行

证. $m_*(E)\le m_*(Q)$ $\Rightarrow m_*(E)\le\inf\{m_*(Q)\}$

$\forall\varepsilon>0$. 存在闭方体 $\{Q_j\}$ $E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j$ 且 $\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|\le m_*(E)+\varepsilon$

设 Q_j° 是包含 Q_j 的开方体 且 $|Q_j^{\circ}|\le|Q_j|+\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$

令 $Q=\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j^{\circ}$ 是开集. 且 $m_*(Q)\le\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j^{\circ}|=m_*(E)+2\varepsilon$

$\Rightarrow\inf m_*(Q)\le m_*(E)$

(4) 若 $E=E_1\cup E_2$ $d(E_1,E_2)>0$ 则 $m_*(E)=m_*(E_1)+m_*(E_2)$. 要有距离 >0

证. 由(2) $m_*(E)\le m_*(E_1)+m_*(E_2)$.

设 $E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j$ 闭方体 且 $\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|\le m_*(E)+\varepsilon$

分割 Q_j. 使直径 $<\delta=d(E_1,E_2)$ 此时只能与 E_1 或 E_2 相交.

$E_1\subset\bigcup_{j\in J_1}Q_j$ $E_2\subset\bigcup_{j\in J_2}Q_j$ $J_1\cap J_2=\phi$

$m_*(E_1)+m_*(E_2)\le\sum_{j\in J_1}|Q_j|+\sum_{j\in J_2}|Q_j|\le\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|\le m_*(E)+\varepsilon$

(5) 若 E 是可数个几乎不交的方体的并. $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j$ 则 $m_*(E)=\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|$
方体可以

证. $m_*(E)\le\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|$ 易知

设 $\tilde{Q}_j$ 严格包含在 Q_j 中且 $|Q_j|\le|\tilde{Q}_j|+\frac{\varepsilon}{2^j}$

则 $\tilde{Q}_1.\tilde{Q}_2\ldots\tilde{Q}_N$ 不交.

$m_*(E)\ge m_*\left(\bigcup_{j=1}^{N}\tilde{Q}_j\right)=\sum_{j=1}^{N}m_*(\tilde{Q}_j)=\sum_{j=1}^{N}|\tilde{Q}_j|\ge\sum_{j=1}^{N}\left(|Q_j|-\frac{\varepsilon}{2^j}\right)\ge\sum_{j=1}^{N}|Q_j|-\varepsilon$

令 $N\to+\infty$ 有 $\sum_{j=1}^{+\infty}|Q_j|\le m_*(E)+\varepsilon$

(6) 外测度定义中闭方体可改为开方体

证 设 $m_*(E)<+\infty$. $\forall\varepsilon>0$ 存在闭方体 Q_j $E\subset\bigcup_{j=1}^{+\infty}Q_j$ $\sum_{j=1}^{+\infty}|Q_j|\le m_*(E)+\varepsilon/2^j$

取开方体 $\tilde{Q}_j$ 使 $Q_j\subset\tilde{Q}_j$ $|\tilde{Q}_j|\le|Q_j|+\varepsilon/2^j$

故 $E\subset\bigcup_{j=1}^{+\infty}\tilde{Q}_j$ 且 $\sum_{j=1}^{\infty}|\tilde{Q}_j|\le\sum_{j=1}^{+\infty}|Q_j|+\varepsilon\le m_*(E)+2\varepsilon$.

No.
Date. / /

取 inf. $\inf\{\sum_{j=1}^{\infty}|\tilde{Q}_j| \mid \tilde{Q}_j$ 开方体 $E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}\tilde{Q}_j\}\le m_*(E)$ ✓

若 $E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j$ Q_j 开方体 $E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}\overline{Q_j}$

$\Rightarrow m_*(E)\le\sum_{j=1}^{\infty}|\overline{Q_j}|=\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|$ ✓

(7) 平移不变性. $E\subset\mathbb{R}^d$ $x_0\in\mathbb{R}$ $x_0+E=\{x_0+y \mid y\in E\}$ $m_*(x_0+E)=m_*(E)$

证. 若 $E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j$. Q_j 闭方体 $\{x_0+Q_j\}$ 是 x_0+E 的闭方体覆盖 $|x_0+Q_j|=|Q_j|$

$\Rightarrow m_*(x_0+E)\le\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j+x_0|=\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|$

故 $m_*(x_0+E)\le m_*(E)$

E 是 x_0+E 平移 $-x$ 得到 故 $m_*(E)\le m_*(E+x_0)\Rightarrow m_*(E)=m_*(E+x_0)$

(8) 设 $E\subset\mathbb{R}^d$. $\lambda\in\mathbb{R}$. $\lambda E=\{\lambda y \mid y\in E\}$. 则 $m_*(\lambda E)=\lambda^d m_*(E)$

例. 若定义 $m_*(E)=\inf\{\sum_{j=1}^{N}|Q_j| \; E\subset\bigcup_{j=1}^{N}Q_j \; Q_j$ 闭方体$\}$. 一有限个不行

设 $E=[0,1]\cap\mathbb{Q}$. $E\subset\bigcup_{j=1}^{N}Q_j$ Q_j 闭区间

$[0,1]=\overline{E}\subset\bigcup_{j=1}^{N}Q_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{N}|Q_j|\ge 1\Rightarrow m_*(E)\ge 1$

例. 若 $E_1\cap E_2=\phi$. 是否总有 $m_*(E_1\cup E_2)=m_*(E_1)+m_*(E_2)$ 几乎不交不行.

给定 E. 对任意集合 A $A=(A\cap E)\cup(A\cap E^c)$

$m_*(A)=m_*(A\cap E)+m_*(A\cap E^c)\Leftrightarrow E$ 可测

与不可测集的存在性矛盾

例. $m_*(E)\ne\inf\{m_*(F) \; F$ 闭, $E\subset F\}$ 闭集不行.

令 $E=[0,1]\cap\mathbb{Q}$. 则 $E\subset F \Rightarrow \overline{E}\subset\overline{F}=F \Rightarrow [0,1]\subset F$

例. $m_*(E)\overset{?}{=}\sup\{m_*(F) \; F$ 闭 $F\subset E\}$

右边是内测度. 则 左=右 $\Leftrightarrow E$ 可测. 与不可测集的存在性矛盾

定义 设 $E\subset\mathbb{R}^d$ 称 E 是 Lebesgue 可测集. 若 $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ 开 O. $O\supset E$. 且 $m_*(O-E)<\varepsilon$

若 E 可测. 则定义 $m(E)=m_*(E)$

No.
Date. / /

性质. ① R^d中任意开集是可测的.

② 若 $m^*(E)=0$. 则 E 可测

证. $\forall \varepsilon>0$. $\exists O$开 $E\subset O$. $m^*(O)<\varepsilon$.

$m^*(O-E)\le m^*(O)<\varepsilon$.

③ 可测集的可数并是可测的

证. 设 $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$. E_j可测. $\forall\varepsilon>0$ $\forall j>0$ $\exists$开O_j $O_j\supset E_j$ $m^*(O_j-E_j)<\frac{\varepsilon}{2^j}$

令 $O=\bigcup_{j=1}^{\infty}O_j$ O开. $O\supset E$.

$O-E=\bigcup_{j=1}^{\infty}O_j-E=\bigcup_{j=1}^{\infty}(O_j-E)\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}(O_j-E_j)$

$\Rightarrow m^*(O-E)\le\sum_{j=1}^{\infty}m^*(O_j-E_j)=\varepsilon$.

④ 闭集是可测的

证. 只要证有界闭集是可测的(无界用③) 设F有界闭

$\forall\varepsilon>0$. $\exists$开 O. $O\supset F$ $m^*(O)\le m^*(F)+\varepsilon$ (外测度性质(5))

F闭. O开 $\Rightarrow$ $O-F$开 故存在可数个几乎不交的闭方体 Q_j

使 $O-F=\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j$

固定N. 令 $K=\bigcup_{j=1}^{N}Q_j$ 有界闭.紧. $d(F,K)>0$

由于 $K\cup F\subset O$ 故 $m^*(O)\ge m^*(K\cup F)=m^*(K)+m^*(F)$

$m^*(K)\le m^*(O)-m^*(F)\le\varepsilon$. 令 $N\to\infty$ $m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j)\le\varepsilon$

故 $m^*(O-F)\le\varepsilon\Rightarrow F$可测.

引理. 设F闭. K紧. 则 $d(F,K)>0$. $(K\cap F=\emptyset)$

证1 F闭. $\forall x\in K$. $d(x,F)>3\delta_x>0$.

故 $\bigcup_{x\in K}B_{2\delta_x}(x)\supset K$. K紧. 故存在 $\{B_{2\delta_{x_i}}(x_i)\}_{i=1}^{N}$ 覆盖 K.

令 $\delta=\min_{1\le i\le N}\{\delta_{x_i}\}$. 则 $d(F,K)\ge\delta>0$

原因. $\forall y\in K$. $\exists x_i$ $|y-x_i|\le 2\delta_{x_i}$ 由于 $d(x_i,F)\ge 3\delta_{x_i}$

$\Rightarrow d(y,F)\ge 3\delta_{x_i}-2\delta_{x_i}=\delta_{x_i}\ge\delta>0$

证2. 设 $d(F,K)=0$ $\exists x_n\in F$. $y_n\in K$ $d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$.

K紧 $\exists$子列 $\{y_{n_i}\}$ $y_{n_i}\to y_0\in K$.

No.

Date. / /

$d(x_n, y_0) \le d(x_n, y_n) + d(y_n, y_0) < \frac{1}{n} + d(y_n, y_0) \to 0$

$x_n \to y_0$. F闭 $\Rightarrow y_0 \in F$ 与 $F \cap K = \phi$ 矛盾

⑤ 可测集的补集

证. 设 E 可测. $\exists$开 O_n $E \subset O_n$ $m_*(O_n - E) < \frac{1}{n}$.

O_n^c 闭可测 故 $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^c$ 可测.

$O_n^c \subset E^c$ 故 $S \subset E^c$ 由于 $E^c = (E^c - S) \cup S$.

只要 $E^c - S$ 可测. 由于 $E^c - S = E^c \cap S^c = E^c \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^c)^c$

$= E^c \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n) \subseteq E^c \cap O_n = O_n - E$

故 $m_*(E^c - S) \le m_*(O_n - E) \le \frac{1}{n}$.

故 $E^c - S$ 可测 从而 $E^c = (E^c - S) \cup S$ 可测

⑥ 可测集的可数交是可测的

证. $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c)^c$

⑦ E 可测 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$. $\exists$ 闭 $F \subset E$. 使 $m_*(E - F) < \varepsilon$.

证 $\Rightarrow$. E 可测 $\Rightarrow E^c$ 可测

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists$ 开 G. $G \supset E^c$. $m_*(G - E^c) < \varepsilon$.

而 $G - E^c = E - G^c$

故 $m_*(E - G^c) < \varepsilon$. G^c 闭 ✓

$\Leftarrow$ $\forall \varepsilon > 0$. 闭 F. $F \subset E$. $m_*(E - F) < \varepsilon$.

故 $E^c \subset F^c$. $F^c - E^c = F^c \cap (E^c)^c = E \cap F^c = E - F$

故 $m_*(F^c - E^c) < \varepsilon \Rightarrow E^c$ 可测 $\Rightarrow E$ 可测.

定理. 若 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ 一列不交的可测集. $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ 则 $m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$

①. 首先设 E_j 都有界 由性质 7. $\forall \varepsilon > 0$. $\exists F_j \subset E_j$ F_j 闭 $m_*(E_j - F_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$

由于 $F_1, F_2, \dots F_N$ 紧. 且不交 故 $m(\bigcup_{j=1}^{N} F_j) = \sum_{j=1}^{N} m(F_j)$

$E_j = (E_j - F_j) \cup F_j$ $m(E_j) \le m_*(E_j - F_j) + m(F_j) \le m(F_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$

$m(E) \ge m(\bigcup_{j=1}^{N} F_j) = \sum_{j=1}^{N} m(F_j) \ge \sum_{j=1}^{N} (m(E_j) - \frac{\varepsilon}{2^j}) \ge \sum_{j=1}^{N} m(E_j) - \varepsilon$.

令 $N \to \infty$ $\varepsilon \to 0$ $\sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) \le m(E)$ 又由次可加 $m(E) \le \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$

No.
Date. / /

③ 在一般情型. 设 $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ 一列闭方体 $Q_k \subset Q_{k+1}$ $R^d = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_j$

令 $S_1 = Q_1$, $S_2 = Q_2 - Q_1 \cdots$ $S_k = Q_k - Q_{k-1}$

则令 $E_{j,k} = E_j \cap S_k$. 故 $E_{j,k}$ 两两不交 $E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k}$

$m(E) = \sum_{j,k} m(E_{j,k}) = \sum_{j=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{\infty} m(E_{j,k})) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$

测度的极限.

定义 $E_k \nearrow E$. 若 $E_k \subset E_{k+1}$ 且 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

$E_k \searrow E$ 若 $E_k \supset E_{k+1}$ 且 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$.

性质 设 $E_1, E_2 \cdots$ 是 R^d 的可测集

① 若 $E_k \nearrow E$. 则 $m(E) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$

② 若 $E_k \searrow E$ 且对某个 k. $m(E_k) < \infty$. 则 $m(E) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$

证① 令 $G_1 = E_1$ $G_2 = E_2 - E_1 \cdots$ $G_k = E_k - E_{k-1}$

则 $\{G_k\}$ 相互不交. 且是可测集合. 且 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$

$m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (m(G_k)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (m(E_k) - m(E_{k-1}))$ (令 $E_{k-1} = \phi$)

$= \lim_{N\to\infty} (m(E_N))$.

② 设 $m(E_1) < \infty$. 令 $G_k = E_k - E_{k+1}$. $E_1 = E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$.

故 $m(E_1) = m(E) + m(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k) = m(E) + \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k)$

$= m(E) + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (m(E_k) - m(E_{k+1})) = m(E) + m(E_1) - \lim_{N\to\infty} m(E_N)$

$\Rightarrow m(E) = \lim_{N\to\infty} m(E_N)$

性质. 若 E 可测 且 $m(E) < \infty$. 则 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ 紧 $K \subset E$ 且 $m(E-K) < \varepsilon$

证. $\forall \varepsilon > 0$. $\exists$ 闭 $F \subset E$ $m(E-F) < \varepsilon$ 令 $K_n = F \cap \overline{B_n(0)}$ K_n 紧.

则 $K_n \nearrow F$ 故 $m(F) = \lim_{N\to\infty} m(K_N)$

$\exists N$. $m(F) - m(K_N) < \varepsilon$.

$m(E - K_N) = m(E-F) + m(F - K_N)$

$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

No.

Date.　　/　　/

性质. 若 E 可测. 且 $m(E)<\infty$. 则存在有限个闭方体 $\{Q_j\}_{j=1}^{N}$ 　$F=\bigcup_{j=1}^{N} Q_j$

使 $m(E\Delta F)<\varepsilon$.

证. $\forall \varepsilon>0$. $\exists \{Q_j\}$ 闭方体. $E\subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ 　$\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|<m(E)+\varepsilon$

放存在 $N>0$ 　$\sum_{j=N+1}^{\infty}|Q_j|<\varepsilon$. 　令 $F=\bigcup_{j=1}^{N} Q_j$

$m(E\Delta F)=m(E-F)+m(F-E)$

$\le m(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} Q_j)+m(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j-E)\le \varepsilon+m(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j)-m(E)\le 2\varepsilon$.

定义内测度 $\underline{m}_*(E)=\sup\{m_*(F)\mid F$ 闭且 $F\subset E\}$.

定理. ① 若 E 有界 则 E 可测 $\Leftrightarrow$ $m_*(E)=\underline{m}_*(E)$

② 若 $E\subset\mathbb{R}^d$ 任意集合. 则 E 可测 $\Leftrightarrow$ $\forall n$ 　$m_*(E\cap B_n(0))=\underline{m}_*(E\cap B_n(0))$

证 ① "$\Rightarrow$" 设 E 有界可测.

$\forall\varepsilon>0$. $\exists$ 闭集 F 开集 G. 　$F\subset E\subset G$. 且 $m(E-F)<\frac{\varepsilon}{2}$ 　$m(G-E)<\frac{\varepsilon}{2}$

故 $m(G-F)=m(G-E)+m(E-F)<\varepsilon$. $\Rightarrow m(G)\le m(F)+\varepsilon$.

$m(F)\le m(E)\le m(G)\le m(F)+\varepsilon$. 　由 ε 任意性.

$m(E)\le \underline{m}(E)$ 　而 $\underline{m}_*(E)\le m(E)$ 　$\Rightarrow$ $\underline{m}_*(E)=m(E)$

"$\Leftarrow$" 若 $m_*(E)=\underline{m}_*(E)$. $\forall\varepsilon>0$ 　$\exists$ 开 G. 闭 F. 　$F\subset E\subset G$.

$m(G)\le m_*(E)+\varepsilon=\underline{m}_*(E)+\varepsilon\le m(F)+2\varepsilon$.

$m(G)=m(F)+m(G-F)$ $\Rightarrow$ $m(G-F)\le 2\varepsilon$.

而 $G-E\subset G-F$ $\Rightarrow$ $m_*(G-E)<m(G-F)\le 2\varepsilon$.

② "$\Rightarrow$" E 可测. 故 $E\cap B_n(0)$ 可测

$\Leftarrow$ 　$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\cap B_n(0))$

定理. $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测 $\Leftrightarrow$ $\forall A\subset\mathbb{R}^n$. $m_*(A)=m_*(A\cap E)+m_*(A\cap E^c)$

证 "$\Rightarrow$". 由外测度次可加性. $m_*(A)\le m_*(A\cap E)+m_*(A\cap E^c)$

若 $m_*(A)=\infty$ 成立. 若 $m_*(A)<\infty$.

$\forall\varepsilon>0$. $\exists$ 开 G. 且 $m_*(G)<m_*(A)+\varepsilon$

$A\cap E\subset G\cap E$ 　$A\cap E^c\subset G\cap E^c$.

REMEMBER · MEMORY

No.
Date. / /

$m_*(A\cap E)+m_*(A\cap E^c)\le m_*(G\cap E)+m_*(G\cap E^c)$

$=m(G\cap E)+m(G\cap E^c)=m(G)<m_*(A)+\varepsilon$.

由 ε 任意性. $m_*(A\cap E)+m_*(A\cap E^c)\le m_*(A)$

$\Leftarrow$ 设 G 开. $G\supset E$.

$m_*(G)=m_*(G\cap E)+m_*(G\cap E^c)$

$=m_*(E)+m_*(G-E)$

故 $m_*(G-E)=m_*(G)-m_*(E)$

$\forall\varepsilon>0$. $\exists$ 开 G. $G\supset E$ 且 $m_*(G)<m_*(E)+\varepsilon$.

$\Rightarrow m_*(G-E)<\varepsilon \Rightarrow E$ 可测.

例. 设 $E\subset\mathbb{R}$. E 可测 $m(E)>0$. 则 $\{x-y\mid x\in E.\ y\in E\}$ 包含某个开区间 $(-\delta,\delta)$

证. 设 $0<m(E)<\infty$ $\forall\varepsilon$. $\exists$ 开 G. 闭 K. $K\subset E\subset G$

$m(E)<m(K)+\varepsilon$. $m(G)<m(E)+\varepsilon$.

$\forall x\in K$. x 是 G 内点. 有 0 的一个邻域 V_x. $x+V_x\subset G$.

$\{x+V_x\mid x\in K\}$ 是 K 的覆盖 有有限 $\{x_i+V_{x_i}\mid x_i\in K\}_{i=1}^{N}$ 是 K 覆盖.

令 $V=\bigcap_{i=1}^{N}V_{x_i}$ 有 $K+V\subset G$.

下证 $\forall x\in V$. $(x+K)\cap K\neq\phi$.

否则 $\exists x$. $(x+K)\cap K=\phi$.

$\Rightarrow m(K+x)+m(K)\le m(G)<m(K)+\varepsilon$ ✗

故 $\forall x\in V$ $\exists a\in E$. $b\in E$

$x+a=b$ $x=b-a\in\{x-y\mid x\in E.\ y\in E\}$.

定义 ① $\mathbb{R}^d$ 中可数开集的交称为 G_δ 集

② $\mathbb{R}^d$ 中可数闭集的并称为 F_σ 集

例 ϕ 和 $\mathbb{R}^d$ 既是 G_δ 集也是 F_σ 集

开集是 G_δ 集 闭集是 F_σ 集

No.
Date. / /

定理. $\mathbb{R}^d$ 中任意闭集是 G_δ 集, 开集是 F_σ 集

证 ① 设 $A \subset \mathbb{R}^d$ 闭集 考虑 $f(x) = d(x, A)$.

下证 $f(x)$ 连续 $\forall z \in A$

$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$

对 $z \in A$ 取下确界 $d(x, A) \le d(x, y) + d(y, A)$

同理 $d(y, A) \le d(x, y) + d(x, A)$

$\Rightarrow |d(x, A) - d(y, A)| \le d(x, y) \Rightarrow f(x)$ 连续

$(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中开. 故 $G_n = f^{-1}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中开

$A = f^{-1}(0) = f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))$ (等号可验证) $= \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$

$\Rightarrow$ 闭集是 G_δ 集

② 设 A 开. A^c 闭. $A^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^c$

定义. $\mathbb{R}^n$ 中包含所有开集, 对可数交, 可数并, 补运算封闭的集类称为 (n 维) Borel 集类. 记为 $\mathcal{B}_n$. Borel 集类中的集合称为 Borel 集

定理 ① $E \subset \mathbb{R}^n$. E 可测 $\Leftrightarrow \exists G_\delta$ 集 $G \supset E$. $m^*(G - E) = 0$

② $E \subset \mathbb{R}^n$. E 可测 $\Leftrightarrow \exists F_\sigma$ 集 $F \subset E$ $m^*(E - F) = 0$

证 $\Leftarrow$ ② $E = F \cup (E - F)$

$m^*(E - F) = 0 \Rightarrow E - F$ 可测 F 也可测 $\Rightarrow E$ 可测

① $E = G \cap (G - E)^c$

$G - E$ 可测 $\Rightarrow (G - E)^c$ 可测 $\Rightarrow E$ 可测

$\Rightarrow$ ① $\forall n$ 取开 G_n $G_n \supset E$. $m^*(G_n - E) < \frac{1}{n}$

令 $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ 故 $G \supset E$. $G - E \subset G_n - E$

$m^*(G - E) \le m^*(G_n - E) < \frac{1}{n}$ 令 $n \to \infty$.

$\Rightarrow m^*(G - E) = 0$.

② $\forall n$ 取闭 $F_n \subset E$ $m(E - F_n) < \frac{1}{n}$.

令 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. $F \subset E$. $E - F \subset E - F_n$ $(\forall n)$

$m(E-F) \le m(E-F_n) < \frac{1}{n} \to 0$ 故 $m(E-F)=0$

不可测集

选择公理. 设 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 一族互不相交的非空集合. 则存在集合 $E \subset \bigcup_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha$ 使得 $\forall \alpha\in\Gamma$. $E\cap E_\alpha$ 是单点集. 即存在一集合E. 使得E是选 E_α 中一个元素构成

构造

① 在 $[0,1]$ 中定义 $x\sim y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q}$. $x\sim y$ 是等价关系,

定义 $E_x=\{y\in[0,1] \mid x\sim y\}$

由选择公理. 存在集合 N. N 由每一个等价类中一个元素构成

下证 N 不可测

设 $[-1,1]\cap\mathbb{Q}=\{r\}_{n=1}^{\infty}$ 令 $N_n=N+r_n$

② 当 $r_n\neq r_m$ 时 $N_n\cap N_m=\phi$.

设 $z\in N_n\cap N_m$ 故 $z=x+r_n=y+r_m$ $x,y\in N$. $\Rightarrow x-y=r_m-r_n\in\mathbb{Q}$ 矛盾

③ $[0,1]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n\subset[-1,2]$

$\forall x\in[0,1]$. $x\in E_x$. 设 $N\cap E_x=\{y\}$. 则 $y\in[0,1]$. 且 $x-y\in\mathbb{Q}$

$\exists n$. $x-y=r_n \Rightarrow x\in N_n$ 故 $[0,1]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n$

④ N 不可测 否则 N_n 都可测. $m(N)=m(N_n)$

由可数可加性 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m(N_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m(N)$

由③ $1\le\sum_{n=1}^{\infty}m(N)\le 3$

说明外测度不满足可数可加性

否则上述测度换成外测度

例 设 $E\subset\mathbb{R}$. E可测 $m(E)>0$ 求证 E中包含一个不可测集 W

证. 由于 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\cap[-n,n])$ $E_n=E\cap[-n,n]$ $E_n\nearrow E$. $m(E)=\lim_{n\to\infty}m(E_n)$

故存在 n_0 使 $m(E_{n_0})>0$ 下面考虑 E_{n_0}

No.

Date.　　/　　/

②. $\forall x \in E_{n_0}$ 　$E_x = \{ t \in E_{n_0},\ t - x \in \mathbb{Q} \}$. 　$E_{n_0} = \bigcup_{x \in E_{n_0}} E_x$

设 W 是每个 E_x 中选取一个元素构成的集合 　$W \subset E_{n_0}$

③ $W_{r_n} = W + r_n$, 　$\{r_n\} = \mathbb{Q} \cap [-2n_0, 2n_0]$.

$\Rightarrow E_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (W + r_n) \subset [-3n_0, 3n_0]$.

若 W 可测 则 　$0 < m(E_{n_0}) < \sum_{n=1}^{\infty} m(W) \le 6n_0$ 矛盾

例. 不可数个可测集的交可能不可测.

解. 设 W 不可测 　$W = \bigcup_{x \in W} \{x\}$

$W^c = \bigcap_{x \in W} \{x\}^c$

例 设 $W \subset [0,1)$ 不可测集. 求证 $\exists \varepsilon$ $0<\varepsilon<1$. 使 $[0,1]$ 中任何 $m(E) \ge \varepsilon$ 的可测集 E, $W \cap E$ 不可测

证. 否则 $\forall \varepsilon$. $0<\varepsilon<1$ 　$\exists E_\varepsilon$ 可测 　$E \subset [0,1]$ 　$m(E_\varepsilon) \ge \varepsilon$ 　$E_\varepsilon \cap W$ 可测

令 $\varepsilon_n = 1 - \frac{1}{n}$ 　$\varepsilon_n \to 1$ 　$m(E_{\varepsilon_n}) \ge 1 - \frac{1}{n} \to 1$

$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \ge m(E_n) \ge 1 - \frac{1}{n}$ 　$\Rightarrow$ $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 1$ 　$[0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 零测.

由于 $E_{\varepsilon_n} \cap W$ 可测 　故 $W \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ 可测

$W = (W \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)) \cup (W \cap ([0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n))$

可测 　　　　可测 (零测)

例. 作 $[0,1]$ 中不可测集 W. 使 $W - W = \{x - y \mid x \in W,\ y \in W\}$ 无内点.

解. W 为上述不可测集

$x \in W$. $y \in W$. 　$x - y \notin \mathbb{Q}$. 　$x - y \in \mathbb{Q}^c$

$x = y$. 　$x - y = 0$ 　$\Rightarrow$ $x - y \in (\mathbb{Q} \setminus \{0\})^c$

即 $W - W \subset (\mathbb{Q} \setminus \{0\})^c$ 无内点.

No.
Date. / /

可测函数

称 f 是有限值函数 若 $-\infty<f<+\infty$

称 f 是(广义)实值函数 若 $-\infty\le f\le+\infty$

定义. 设 f 是可测集上的函数. 称 f 是可测函数. 若 $\forall a\in\mathbb{R}$. $f^{-1}([-\infty,a))=\{x\in E \mid f(x)<a\}$ 是可测的 可记为 $\{f<a\}$ 或 $E(f<a)$

例. 若 E 是零测集 则 E 上任意函数都可测

$\forall f$. $E(f<a)\subset E$ $m(E(f<a))=0$. 故 $E(f<a)$ 可测

例 若 E 不可测. $f(x)=\begin{cases}0 & 若\ x\in E\\ 1 & 若\ x\notin E\end{cases}$

f 在 $\mathbb{R}$ 上不可测

定理. 设 f 是可测集上函数. 则下列条件等价

① f 可测

② $\forall a\in R$. $E(f\le a)$ 可测

③ $\forall a\in\mathbb{R}$. $E(f>a)$ 可测

④ $\forall a\in\mathbb{R}$. $E(f\ge a)$ 可测

证. ①⇒② $E(f\le a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f<a+\frac{1}{n})$

②⇒③ $E(f>a)=E-E(f\le a)$

③⇒④ $E(f\ge a)=\bigcap_{n=1}^{+\infty}E(f>a-\frac{1}{n})$

④⇒① $E(f<a)=E-E(f\ge a)$

若 f 是有限值. 则上述条件等价

⑤ $\forall a,b\in R$. $a<b$ $E(a<f<b)$ 可测

①⇒⑤ $E(a<f<b)=E(f>a)-E(f\ge b)$

⑤⇒① $E(f>a)=\bigcup_{n=1}^{+\infty}E(a<f<n)$

若 f 是广义实值函数. 则 f 可测 ⇔ ⑤ 且 $E(f=+\infty)$ $E(f=-\infty)$ 可测

No.
Date. / /

例 设 f 有限值. 则 TFAE

① f 在 E 上可测

② $\forall$ 开 $U\subset\mathbb{R}$ $f^{-1}(U)=\{x\in E \mid f(x)\in U\}$ 可测

③ $\forall$ 闭 $F\subset\mathbb{R}$. $f^{-1}(F)=\{x\in E\mid f(x)\in F\}$ 可测

证 ②⇒① $\forall c\in\mathbb{R}$. $(-\infty,c)$ 开. $f^{-1}(-\infty,c)$ 可测 $=E(f<c)$

①⇒② $\forall$ 开 $U\subset\mathbb{R}$. $U=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 不交

$f^{-1}(U)=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}f^{-1}(a_n,b_n)=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}E(a_n<f<b_n)$ 可测

③⇒① $\forall c\in\mathbb{R}$. $F=(-\infty,c]$ 故 $E(f\leq c)$ 可测

①⇒③ $\forall$ 闭 $F\subset\mathbb{R}$. $F^c=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)^c$.

$f^{-1}(F)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}f^{-1}((a_n,b_n)^c)$

性质 ① 可测集上的可测函数的可数上确界与可数下确界都是可测的

设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上可测 $\sup\limits_n f_n$. $\inf\limits_n f_n$ $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}f_n$ $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}f_n$ 可测

② $n=2$ 时 $\max\{f_1,f_2\}$ $\min\{f_1,f_2\}$ 可测

证. ① $E(\sup\limits_n f_n>a)=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}E(f_n>a)$

$\inf\limits_n f_n=-\sup\limits_n(-f_n)$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup f_n=\inf\limits_k\sup\limits_{n\geq k}f_n$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n=\sup\limits_k\inf\limits_{n\geq k}f_n$

性质 ③ 若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 可测 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f(x)$. 则 f 可测

证 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n$

若 $f\cdot g$ 可测. 则

① f^k $(k\geq1,\ k\in\mathbb{N})$ 可测

② $f+g$. $f\cdot g$ 可测 若 $f\cdot g$ 均为有限值

③ $g\neq0$ 时 $\frac{1}{g}$ 可测

④ $f^+=\max\{f,0\}$. $f^-=\min\{f,0\}$ $|f|$ 均可测

No.
Date. / /

证 ① k 奇 $E(f^k>a)=E(f>a^{\frac{1}{k}})$

k 偶 $E(f^k>a)=E(f>a^{\frac{1}{k}})\cup E(f<-a^{\frac{1}{k}})$

② $E(f+g>a)=\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}}(E(g>r)\cup E(f>a-r))$

$f+g>a\Rightarrow g>a-f\Leftrightarrow g>r>a-f$

$f\cdot g=\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2]$

③
$$E(\frac{1}{g}>c)\begin{cases}E(g<\frac{1}{c})\cap E(g>0) & c>0\\ E(g>0) & c=0\\ E(g>0)\cup E(g<\frac{1}{c}) & c<0\end{cases}$$

性质 若 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 两两不交. 则 f 在 E 上可测 $\Leftrightarrow$ f 在 E_n 上可测

证 "$\Rightarrow$" $E_k(f>a)=E_k\cap E(f>a)$

"$\Leftarrow$" $E(f>a)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_k(f>a)$

例 设 f 在可测集 $E(\subseteq R^n)$ 上连续. 则 f 在 E 上可测. 反之不成立.

证. $\forall a\in\mathbb{R}$. 只要证 $\exists$ R^n 中开集 G, $E(f>a)=E\cap G$.

$\forall x\in E(f>a)$ $f(x)>a$ $\exists$ x 的邻域 $B_{\delta_x}(x)\subset\mathbb{R}^n$

$\forall x'\in B_{\delta_x}(x)\cap E$ $f(x')>a$ 故 $E\cap B_{\delta_x}(x)\subset E(f>a)$

令 $G=\bigcup\limits_{x\in E(f>a)}B_{\delta_x}(x)$ 故 G 开. $E(f>a)\subset E\cap G=\bigcup\limits_{x\in E(f>a)}(E\cap B_{\delta_x}(x))\subset E(f>a)$

故 $E(f>a)=E\cap G$

反例 $f(x)=\begin{cases}1 & 若x\in[0,1]\\ 0 & 若x\notin[0,1]\end{cases}$

几乎处处

定义 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 可测集. $p(x)$ 是关于 E 中元素 x 的命题. 若 $\exists A\subset E$, $m(A)=0$ $p(x)$ 在 $E-A$ 成立. 则称 $p(x)$ 在 E 上几乎处处成立 记为 $p(x)$ .a.e 于 E

例 f,g E 上函数 则 $f=g$ a.e 于 E $\Leftrightarrow$ $m(E(f\neq g))=0$

No.
Date.　/　/

命题 若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测，f,g 是 E 上函数 若 $f=g$ a.e 于 E，则 f 与 g 可测性相同

证. $E(f>a)\ \Delta\ E(g>a)\subset E(f\neq g)$

由于 $E(g\neq f)$ 零测 故 $E(f>a)\ \Delta\ E(g>a)$ 零测

故 $E(f>a)$ 与 $E(g>a)$ 相差一个零测集

定义 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ f_n 是可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 函数 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ a.e 于 E，则称

f_n 在 E 上几乎处处收敛于 f $f_n\to f$ a.e 于 E

命题 $\{f_n\}$ 一列可测集上的可测函数 $f_n\to f$ a.e 于 E，则 f 在 E 上可测

证 令 $E_1=\{x\in E.\ f_n(x)\not\to f\}$ 故 $m(E_1)=0$

在 $E\setminus E_1$ 上，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ f 在 $E\setminus E_1$ 上可测.

而 f 在 E_1 上可测 $\Rightarrow$ f 在 E 上可测

例. 设 $E\subset\mathbb{R}$ 可测，则 E 上单调函数可测.

$E(f<a)=E\cap(-\infty.$

定义 ① 给定集合 E. $\chi_E(x)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$

② 设 $\{E_i\}_{i=1}^{N}$ 有限个两两不交的可测集. 且 $m(E_i)<\infty$ $\{a_i\}_{i=1}^{N}$ 有限个实数 $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\chi_{E_i}(x)$ 为简单函数

③ 设 $\{R_i\}_{i=1}^{N}$ 有限个互不相交的方体. $\{a_i\}_{i=1}^{N}$ 有限个实数，则

$\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\chi_{R_i}(x)$ 称为阶梯函数.

说明：简单函数在可测集E上可测 $\forall a\in\mathbb{R}.\ E(\varphi>a)=\bigcup\limits_{i:\,a_i>a}(E_i\cap E)$

命题 设 f, g 简单函数. $c \in \mathbb{R}$

则 ① cf. $f \pm g$ 简单函数

② φ 是 $\mathbb{R}$ 上实值函数. 则 $\varphi(f)$ 简单.

证. ① $f = \sum_i a_i \chi_{E_i}$ $g = \sum_j b_j \chi_{F_j}$ 设 $\bigcup_i E_i = \bigcup_j F_j$

则 对不同数对 (i, j) $E_i \cap F_j$ 不交

$E_i = \bigcup_j (E_i \cap F_j)$ $F_j = \bigcup_i (E_i \cap F_j)$

则 $f + g = \sum_i a_i \chi_{E_i} + \sum_j b_j \chi_{F_j}$

$= \sum_i a_i (\sum_j \chi_{E_i \cap F_j}) + \sum_j b_j (\sum_i \chi_{E_i \cap F_j})$

$= \sum_i \sum_j (a_i + b_j) \chi_{E_i \cap F_j}$ 是简单函数

(2) $\varphi(f) = \sum_i \varphi(a_i) \chi_{E_i}$ 简单.

定理. 设 f 是可测集 E 上非负可测函数. 则存在 E 上的非负简单函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $\varphi_k(x) \le \varphi_{k+1}(x)$ $\lim\limits_{k \to +\infty} \varphi_k(x) = f(x)$ $\forall x$. 若 f 有界 则上述收敛是一致收敛.

$\forall k \in \mathbb{N}$ 将 $[0, k]$ 分割成 $k \cdot 2^k$ 个区间

令 $E_{k,j} = E(\frac{j-1}{2^k} \le f < \frac{j}{2^k})$. $1 \le j \le k \cdot 2^k$

$E_k = E(f \ge k)$ $k = 1, 2 \dots$

令 $\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{j-1}{2^k} & x \in E_{k,j} \\ k & x \in E_k \end{cases}$

则 φ_k 简单 且 $\varphi_k(x) \le \varphi_{k+1}(x) \le \cdots \le f(x)$.

若 $f(x) = +\infty$ 则由定义知 $\varphi_k(x) = k$, $\forall k$.

若 $f(x) \ne +\infty$ 则 $|f(x) - \varphi_k(x)| < \frac{1}{2^k}$ $\forall x$ 故 $\lim\limits_{k \to +\infty} \varphi_k(x) = f(x)$

定理. 可测 E 上 $f(x)$ 可测 $\Leftrightarrow$ 存在一列简单函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $|\varphi_k(x)| \le |\varphi_{k+1}(x)|$ $|\varphi_k(x)| \le |f(x)|$ $\lim\limits_{k \to +\infty} \varphi_k(x) = f(x)$ $\forall x \in E$. 若 f 有界 则为一致收敛.

证. "$\Rightarrow$" $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$

对于 $f^+(x)$. 存在 $\varphi_k^{(1)}(x)$ $f^-(x)$. 存在 $\varphi_k^{(2)}(x)$. $\varphi_k = \varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)}$

Littlewood 三原则

① 每个集合几乎是区间的有限并

② 每个函数几乎是连续的

③ 收敛序列几乎是一致收敛.

$f_n \to f$ 在 E 上 $\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N(x,\varepsilon) > 0\ \forall k \geq N$ 有 $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$

$f_n \rightrightarrows f$ 在 E 上 $\Leftrightarrow \forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0,\ \forall k \geq N$ 有 $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

定义. 设 E 可测 $\{f_n\}$ f 在 E 上可测, 且几乎处处有限.

① 几乎处处收敛. 若存在零测集 $E_0 \subset E$, 且 $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in E - E_0$

f_n 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$. 记为 $f_n \to f(x)$ a.e 于 E.

② 依测度收敛 $\forall \varepsilon > 0$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty} m(E(|f_n - f| \geq \varepsilon)) = 0$. 则称 f_n 依测度收敛到 f $\quad f_n \xrightarrow{m} f$ 于 E

③ 几乎一致收敛 $\forall \delta > 0$ $\exists$ 可测 $E_\delta \subset E$ $m(E - E_\delta) < \delta$. 使 $f_n \rightrightarrows f$ 在 E_δ 上 则称 f_n 几乎一致收敛到 f $\quad f_n \to f$ a.un 于 E. (almost uniform.)

约定 E 可测 $\{f_n\}$, f 定义在 E 上可测, 几乎处处有限.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{几乎处处收敛} \arrow[dl, shift right, "m(E)<\infty"', "\text{Egoroff}"] \arrow[dr, shift left, "m(E)<\infty", "\text{Lebesgue}"'] & \\
\text{几乎一致收敛} \arrow[ur, shift right] \arrow[rr, shift left] & & \text{依测度收敛} \arrow[ll, shift left, "\text{取子列}"] \arrow[ul, shift left, "\text{Riesz 取子列}"]
\end{tikzcd}$$

定理 (Egoroff). 若 $m(E) < \infty$. $f_n \to f$ a.e 于 E. 则 $f_n \xrightarrow{a.un} f$ 于 E

证. 令 $E_0 = E(f_n \to f)$ 代替 E. 故可假设在 E 上 $f_n \to f$ 处处成立

~~$\forall \varepsilon > 0$~~ $\quad E_k^i = \{x \in E \mid \forall j > k\ |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{i}\}$

$\forall i\ \exists k.$ E_k^i 非空 $\quad E_k^i \subset E_{k+1}^i \quad E_k^i \nearrow E\ (k \to +\infty)$

$\lim\limits_{k\to\infty} m(E_k^i) = m(E).\quad \forall i\ \exists k_i\quad m(E - E_{k_i}^i) < \frac{1}{2^i}$

故在 $E_{k_i}^i$ 上有 $\forall j > k_i\ |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{i}$

No.
Date. / /

令 $A=\bigcap_{i\geq N} E_{k_i}^i$ $E-A=E\cap A^c=E\cap\bigcup_{i\geq N}((E_{k_i}^i)^c)=\bigcup_{i\geq N}(E-E_{k_i}^i)$

$m(E-A)\leq\sum_{i\geq N} m(E-E_{k_i}^i)\leq\sum_{i\geq N}(\frac{1}{2^i})<\delta$ (当 N 大时)

$\forall \varepsilon>0$. $\exists i\geq N$ $\frac{1}{i}\leq\varepsilon$ 在 A 上 $A=\bigcap_{i\geq N} E_{k_i}^i$

$\forall x\in A$. 有 $x\in E_{k_i}^i$ $(\forall i\geq N)$

$\Rightarrow \forall j\geq k_i$ $|f_j(x)-f(x)|<\frac{1}{i}\leq\varepsilon$

例. $f_k(x)=x^k$ $f(x)=0$ $E=[0,1)$ $f_k(x)\to f(x)$ 于 E. 但不是一致收敛.

令 $E_\delta=[0,1-\delta]$ 则 $f_k(x)$ 在 E_δ 上一致收敛到 f.

说明. $m(E)\neq\infty$ 不能去掉

令 $E=\mathbb{R}$. $f_n=\chi_{(n,+\infty)}$ $n\in\mathbb{Z}$. 则 $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$ 对任意可测集 A. $m(A)<\delta$

$(n,+\infty)\setminus A\neq\phi$. 故存在 $x_n\in E-A$. $f_n(x_n)=1$. 不一致收敛到 0

定理. 若 $f_n\xrightarrow{a.un} f$ 则 $f_n\to f$ a.e 于 E

$\forall k\in\mathbb{N}$. $\exists E_k\subset E$. $m(E_k)<\frac{1}{k}$. $f_n\rightrightarrows f$ 于 $E-E_k$

令 $B=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E-E_k)$ $\forall x\in B$. $\exists k_0$ $x\in E-E_{k_0}$ $f_k(x)\to f(x)$.

$m(E-B)=m(\bigcap_{k=1}^{\infty}(E\cap E_k))\leq m(E\cap E_k)<\frac{1}{k}\to 0$. $\Rightarrow m(E-B)=0$.

Wengu 文谷

地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

一般可积函数

回忆. 若 f 在可测 E 上可测且 $\int f^+$, $\int f^-$ 有限

则 $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$ 且 f 称为 Lebesgue 可积.

故 f 可积 $\Leftrightarrow$ $|f|$ 可积

对 Riemann 上式不成立

定义. 若 $\int_E f^+$ $\int_E f^-$ 仅有一个有限. 则称 $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$ 是 f 在 E 上广义积分.

性质. ① 若可测 f 在可测 E 上可积, 则 f 几乎处处有限

② 设可测 f 在可测 E 上几乎处处为0 则 $\int_E f = 0$

证. $f = 0$ a.e 于 $E \Rightarrow |f| = 0$ a.e 于 E

$\Rightarrow \int_E |f| = 0 \Rightarrow \int_E f^+ = 0, \int_E f^- = 0$

$\Rightarrow \int_E f = 0$

绝对连续性. 设 f 在 E 上可积 $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$ 使对任意 $A_\delta \subset E$. $m(A_\delta) = \delta$. 则 $\left|\int_{A_\delta} f\right| \le \int_{A_\delta} |f| < \varepsilon$

例. 设 f 在 $[0,1]$ 上可积 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,1]} x^n f(x)\, dx = 0$

证. 由绝对连续性 $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta \in (0,1)$ 使

$\int_{[\delta,1]} |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\int_{[0,1]} x^n |f(x)| = \int_{[0,\delta]} x^n |f(x)| + \int_{[\delta,1]} x^n |f(x)|$

$\le \delta^n \int_{[0,1]} |f(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \to 0$

控制收敛定理. 设 $\{f_n\}$ g 可积. $|f_n| \le g$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ a.e. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \int |f_n - f| = 0$ 故

$\int_E f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n$

证1. f 可积.. 令 $E_N = \{x \in E \mid |x| \le N.\ g(x) \le N\}$

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists N > 0$ 使 $\int_{E-E_N} g < \varepsilon$ ($E_N \nearrow E$ $g_n = g\chi_{E_N}$)

由于 $f_n \chi_{E_N}$ 有界函数. 由有界收敛定理

$\int_{E_N} |f_n - f| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \int_E |f_n - f| \le \int_{E_N} |f_n - f| + \int_{E-E_N} |f_n - f|$

$\le \varepsilon + 2\int_{E-E_N} g \le 3\varepsilon$

证2. f 可积.. 令 $F_n = |f_n - f|$ F_n 可积. $F_n \to 0$ a.e 于 E

$0 \le F_n \le 2g$ 对 $2g - F_n$ 用 Fatou 引理

$\int_E \varliminf\limits_{n\to\infty} (2g - F_n) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \int_E (2g - F_n)$

$\Rightarrow 2\int_E g - \int_E \varlimsup\limits_{n\to\infty} F_n \le \int_E 2g - \varlimsup\limits_{n\to\infty} \int_E F_n$

$\varlimsup\limits_{n\to\infty} \int_E F_n \le 2\int_E g - 2\int_E g = 0$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E F_n = 0$

说明"$|f_n| \le g$. g 可积"不能去掉

设 $f_n(x) = \begin{cases} n & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & x > \frac{1}{n} \end{cases}$

设 $|f_n(x)| \le g(x) \Rightarrow g(x) \ge n$ $\forall x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$

$\int_0^\infty g(x) \ge \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n\, dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \sum \frac{1}{n+1} = \infty$.

由于 $f_n \to f = 0$ a.e 于 $[0, +\infty)$

$\int_0^\infty f_n(x) = 1$ $\int_0^\infty f(x) = 0$

例求. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} \sin^5 x\, dx$.

解. 令 $f_n = \frac{n\sqrt{x}}{1+x^2n^2} \sin^5 x$ $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$

当 $0 < x < 1$ $|f_n| \le \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} \le \frac{n\sqrt{x}}{2nx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

当 $x \ge 1$ $|f_n| \le \frac{n\sqrt{x}}{n^2x^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

令 $g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & x \in (0,1) \\ x^{-\frac{3}{2}} & x \in [1, +\infty) \end{cases}$ 则 $|f_n| \le g$. $\forall x \ge 0$ 且 g 可积

由控制收敛定理 $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim f_n = 0$

推论. 设 $\{f_n\}$ 可积函数列 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$. 则

① 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ 几乎处处收敛

② $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 可积.

③ $\int_E f(x) = \int_E \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_E f(x)$

证. 令 $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 由非负可测函数逐项积分定理

$\int_E F(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int |f_n(x)| < \infty$ $F(x)$ 可积 几乎处处有限.

故 $f(x) = \sum f_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛 且 $|f(x)| \le F(x)$ 故 $f(x)$ 可积

令 $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ 则 $|g_n(x)| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |f_k(x)| \le F(x)$

由控制收敛定理. 得 $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n(x) = \int_E \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x) = \int_E f(x)$

L^1可积函数

例. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 在 $[0,1]$ 上可积.

证. 令 $f_n=\frac{x^n}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^1 x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)} < \infty$$

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积且 $\int_0^1 f dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$

推论(积分号下求导) 设 $f(x,y)$ 是 $E\times(a,b)$ 上函数. 固定 $y\in(a,b)$ $f(x,y)$ 作为 x 的函数在 E 上可积. 看作 y 的函数是可导的 且存在可积 $F(x)$ 使 $|\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)|\le F(x)$ $\forall (x,y)\in E\times(a,b)$ 则 $\frac{\partial}{\partial y}\int_E f(x,y)\,dx = \int_E \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx$

证. 固定 $y\in(a,b)$ 记 $g_n(y)=\frac{f(x,y+h_n)-f(x,y)}{h_n}$ $(h_n\to 0)$

故 $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ $\forall x\in E$

$|g_n(x)| = |\frac{\partial}{\partial y}f(x,y+\theta h_n)| \le F(x)$

由控制收敛定理.

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_E f(x,y)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_E \frac{f(x,y+h_n)-f(x,y)}{h_n}dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\,dx = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = \int_E \frac{\partial}{\partial y}F(x,y)\,dx$$

回忆单调收敛定理. 若 $\{f_n\}$ 非负可测. $f_n\nearrow F$. 则 $\int_E f=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n$ 问题"非负"是否能去掉.

例. 设 $f_n(x)=\begin{cases}-\frac{1}{nx} & 0<x\le 1\\ 0 & x=0\end{cases}$ 则 $f_n\nearrow f$ f 恒为 0

$\int_0^1 f_n(x)\,dx=-\infty$ $\int_0^1 f(x)=0$ 故 $\int_E f\ne\lim_{n\to\infty}\int_E f_n$

命题 设 $\{f_n\}$ 在 E 上可积. 且 $f_n\nearrow f$ 则 $\int_E f=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n$

证 令 $g_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)$ 故 g_n 非负可积.

$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)=f(x)-f_1(x)$

$$\Rightarrow \int_E f-\int_E f_1=\int_E\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E g_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_E f_{n+1}(x)-\int_E f_n(x)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_E f_{k+1}(x)-\int_E f_k\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_E f_{n+1}-\int_E f_1(x)\right)$$

$$\Rightarrow \int_E f=\lim_{n\to\infty}\int_E f_{n+1}$$

复值积分.

$\mathbb{R}^d$ $f(x)=u(x)+iv(x)$ u,v 为实值可测函数

若 $|f|=\sqrt{u^2+v^2}$ 是 Lebesgue 可积的 则 f 称为 (Lebesgue) 可积

则 f 可积 $\Leftrightarrow$ u,v 作为实值函数是可积的

"$\Rightarrow$" $|u|,|v|\le|f|$ "$\Leftarrow$" $|f|\le|u|+|v|$

定义 f 的 Lebesgue 积分 $\int_{\mathbb{R}^d}f(x)dx=\int_{\mathbb{R}^d}u(x)+i\int_{\mathbb{R}^d}v(x)$

若 $E\subset\mathbb{R}^d$. $\int_E F=\int_{\mathbb{R}^d}F\cdot\chi_E$

一些例子

Ex $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 可测

求证 $m(\underline{\lim} E_k) \le \underline{\lim}\, m(E_k)$

若 $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) < \infty$. 则 $m(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_k) \ge \overline{\lim_{n\to\infty}}\, m(E_n)$

证 $\underline{\lim} E_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k\ge j} E_k = \lim_{j\to\infty} (\bigcap_{k\ge j} E_k)$ ↑

$\overline{\lim} E_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k\ge j} E_k = \lim_{j\to\infty} (\bigcup_{k\ge j} E_k)$ ↓

① $m(E_l) \ge m(\bigcap_{k\ge j} E_k) \quad \forall\, l \ge j$

$\Rightarrow \inf_{l\ge j} m(E_l) \ge m(\bigcap_{k\ge j} E_k)$

$\sup_j \inf_{l\ge j} m(E_l) \ge \sup_j m(\bigcap_{k\ge j} E_k) = \lim_{j\to\infty} m(\bigcap_{k\ge j} E_k) = m(\underline{\lim} E_k)$

② $m(E_l) \le m(\bigcup_{k\ge j} E_k) \quad \forall\, l \ge j$

$\Rightarrow \sup_{l\ge j} m(E_l) \le m(\bigcup_{k\ge j} E_k)$

$\Rightarrow \inf_j \sup_{l\ge j} m(E_l) \le \inf_j m(\bigcup_{k\ge j} E_k) = \lim_{j\to\infty} m(\bigcup_{k\ge j} E_k) \overset{m(\cdots)<\infty}{=} m(\lim_{j\to\infty} \bigcup_{k\ge j} E_k) = m(\overline{\lim} E_k)$

Borel-Cantelli.

$\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty \Rightarrow m(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n) = 0$

proof. $\forall\, \varepsilon$ $\exists j$ 足够大 $\sum_{k\ge j}^{\infty} m(E_k) < \varepsilon$

$\Rightarrow m(\bigcup_{k\ge j} E_k) \le \sum_{k=j}^{\infty} m(E_k) < \varepsilon$

$\lim_{j\to\infty} m(\bigcup_{k\ge j} E_k) \le \varepsilon \Rightarrow m(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n) \le \varepsilon \Rightarrow m(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n) = 0$

Ex. 设 $\alpha > 2$. $E = \{x \in [0,1] \mid$ 存在无限多个分数 $\frac{p}{q}$ 其中 p, q 互素. 正. $|x - \frac{p}{q}| \le \frac{1}{q^\alpha}\}$

求证 $m(E) = 0$

proof. 令 $E_{p,q}$ 是 p, q 固定时 x 的集合

$E_q = \bigcup_{p=1}^{q} E_{p,q} \qquad m(E_{p,q}) \le \frac{2}{q^\alpha}$

$\Rightarrow m(E_q) \le \frac{2(q+1)}{q^\alpha}$

$\Rightarrow \sum_{q=1}^{\infty} m(E_q) \le \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2(q+1)}{q^\alpha} < \infty$

No.

Date.　　/　　/

而 E: x 属于无限个 $E_q \Rightarrow x \in \overline{\lim_{q\to\infty}} E_q = \bigcap_{q=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq q} E_k$

$\Rightarrow m(\overline{\lim_{q\to\infty}} E_q) = 0 \Rightarrow m(E) = 0$

REMEMBER · MEMORY

可测与连续

回忆 设 $\{E_i\}_{i=1}^{N}$ 两两不交可测集，且测度有限 $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{N} a_i\chi_{E_i}(x)$ $a_i\in\mathbb{R}$. 简单函数

定理 可测集 E 上 f 可测 $\Leftrightarrow$ 存在一列简单函数 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$

$|\varphi_k(x)|\le|\varphi_{k+1}(x)|$ $|\varphi_k(x)|\le|f(x)|$ $\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$.

若 f 有界，上述为一致收敛

$$E=\bigcup_{i=1}^{K}E_i$$

引理 设 $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{K}a_i\chi_{E_i}(x)$ 为可测 E 上简单，E_i 两两不交，$\forall\delta>0$ $\exists$ 闭 F. $F\subset E$.
$m(E-F)<\delta$. φ 在 F 上连续

证 $\forall\delta>0$ 取闭 $F_i\subset E_i$ $m(E_i-F_i)<\frac{\varepsilon}{k}$. $F=\bigcup_{i=1}^{k}F_i$ 则

$F\subset E$. F 闭. $m(E-F)<\delta$.

由于 φ 在每个 F_i 上是常值，故在 F 上连续

(取 $\forall$ 闭 $B\subset\mathbb{R}$. $\varphi^{-1}(B)$ 是有限个 F_i 并. 故是闭集)

定理 (Lusin) 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测. f 在 E 上几乎处处有限，可测. 则 $\forall\delta>0$ $\exists$ 闭 $F\subset E$
$m(E-F)<\delta$ f 在 F 上连续

证. 由于 $m(E(|f|=\infty))=0$. 故可设 f 在 E 上处处有限.

定义 $g(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}$ $|g(x)|<1$

故存在 E 上简单函数 $\{\varphi_i\}$ 一致收敛到 $g(x)$.

对 φ_i $\exists$ 闭 F_i $m(E-F_i)<\frac{\delta}{2^i}$ φ_i 在 F_i 上连续

令 $F=\bigcap_{i=1}^{\infty}F_i$ $F\subset E$. $m(E-F)<\delta$

由于 φ_i 在 F 上连续，且一致收敛于 $g(x)$ $\Rightarrow$ g 在 F 上连续

故 $f(x)=\frac{g(x)}{1-|g(x)|}$ 在 F 上连续

例 设 $D(x)$ 定义在 $[0,1]$ 上满足 $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$ 则 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上可测，且
在 $[0,1]$ 上处处不连续

$\forall\delta>0$ 定义 $F_\delta=[0,1]-\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(r_i-\frac{\delta}{2^{i+1}},\ r_i+\frac{\delta}{2^{i+1}}\right)$

r_i 是 $[0,1]$ 所有有理数

No.
Date. / /

第二章 积分.

§4 黎曼定义积分

① 简单函数

② 有限测度集上有界函数

③ 非负可测函数

④ 一般可积函数

第一步. 简单函数 $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}(x)$ 要求满足

① $\{a_i\}$ 互不相同. 非零

② $E_i\subset \mathbb{R}^n$ 可测. 且测度有限.

③ E_i 两两不交

此时称为 简单函数的标准型

设 φ 只取有限个非零值 $\{a_1,\cdots a_k\}$ 设 $F_i=\{x|\varphi(x)=a_i\}$ 则 $\{F_i\}$ 两两不交.

$\varphi(x)=\sum_i a_i\chi_{F_i}$ 为标准型

定义 设 $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{N} a_k\chi_{E_k}$ 为标准型 定义 $\varphi(x)$ 的 Lebesgue 积分 $\int\varphi(x)dx=\sum_{k=1}^{N}a_k m(E_k)$

若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 有限测度. 则 $\varphi(x)\chi_E(x)$ 为简单函数

$\int_E\varphi(x)dx=\int\varphi(x)\chi_E(x)dx$

性质 (1) 积分与表达式选取无关

(2) 线性性质 $\varphi.\psi$ 简单 $a\ b\in\mathbb{R}$ 则 $\int(a\varphi+b\psi)dx=a\int\varphi dx+b\int\psi dx$

(3) 可加性 若 $E.F$ 不交. 有限测度 则 $\int_{E\cup F}\varphi=\int_E\varphi+\int_F\varphi$

(4) 单调性 若 $\varphi.\psi$ 简单 $\varphi\le\psi$ 则 $\int\varphi\le\int\psi$

(5) 三角不等式 φ 简单则 $|\varphi|$ 简单 $|\int\varphi|\le\int|\varphi|$

证 (1) 设 $\varphi(x)=\sum_k a_k\chi_{E_k}$ E_k 不交. a_k 可以相同或 0

若 $\{a_k\}$ 中任一非零元素. a. 定义 $E_a'=\bigcup_{k\in\Lambda_a}E_k$ $\Lambda_a=\{k|a_k=a\}$

$\{E_a'\}$ 互不相交. $m(E_a')=\sum_{k\in\Lambda_a}m(E_k)$

$\int\varphi=\sum_a a\,m(E_a')=\sum_a a\sum_{k\in\Lambda_a}m(E_k)=\sum_k a_k m(E_k)$

No.

Date. / /

设 $\varphi=\sum_k a_k \chi_{E_k}$ $\{E_k\}$ 可以相交. 则 $E=\bigcup_{k=1}^N E_k$. 存在分割

$E=\bigcup_{j=1}^n E_j^*$ $\{E_j^*\}$ 两两不交. $E_j^* \subset$ 某个 E_k

且定义 $a_j^*=\sum_{k\in\Lambda_j} a_k$ $\Lambda_j=\{k \mid E_j^*\subset E_k\}$

$E_k=\bigcup_{j \mid E_j^*\subset E_k} E_j^*=\bigcup_{j:k\in\Lambda_j} E_j^*$ $\varphi=\sum_{j=1}^n a_j^* E_j^*$

$\int\varphi=\sum_{j=1}^n a_j^* m(E_j^*)=\sum_j\sum_{k\in\Lambda_j} a_k\, m(E_j^*)=\sum_k a_k\sum_{j:k\in\Lambda_j} m(E_j^*)=\sum_k a_k m(E_k)$

(2) 设 $\varphi=\sum a_i\chi_{G_i}$ $\psi=\sum b_j\chi_{F_j}$

设 $\{E_i\}$ 不交. $\{F_j\}$ 不交 $\{E_i\cap F_j\}$ 不交. 编号为 $\{G_i\}$

则 $\varphi=\sum a_i'\chi_{G_i}$ $\psi=b_i'\chi_{G_i}$

$\int a\varphi+b\psi=\sum a a_i' m(G_i)+\sum b b_i' m(G_i)=a\int\varphi+b\int\psi$

(3) $\chi_{E\cup F}=\chi_E+\chi_F$

(4). 简单函数 $\eta\geq 0 \Rightarrow \int\eta\geq 0$

(5) 设 $\varphi=\sum_k a_k\chi_{E_k}$ 标准型

$|\varphi|=\sum_k |a_k|\chi_{E_k}$

故 $|\int\varphi|=|\sum a_k m(E_k)|\leq\sum|a_k|m(E_k)=\int|\varphi|$

第二步. 给定 f: $\operatorname{supp} f=\{x \mid f(x)\neq 0\}$ 若 $f(x)=0$ $\forall x\notin E$. 则 $\operatorname{supp} f\subset E$

若 f 可测. 则 $\operatorname{supp} f$ 可测. 设 $m(\operatorname{supp} f)<\infty$.

引理. 设 $m(E)<\infty$. $\operatorname{supp} f\subset E$. f 有界 若 $\{\varphi_k\}$ 简单. $\operatorname{supp}\varphi_k\subset E$. $|\varphi_k|\leq M$.

$\varphi_k\to f$ a.e 于 E 则

① $\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n$ 存在

② 若 $f=0$ a.e 则 $\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n=0$

证. 若 $\{\varphi_n\}$ 在 E 上一致收. 则结论成立

由 $m(E)<\infty$. 由 Egorov 定理 $\forall\varepsilon>0$. $\exists$ 闭 $A_\varepsilon\subset E$. $m(E-A_\varepsilon)<\varepsilon$. 且 φ_n 在 A_ε 上一致收

敛于 f

令 $I_n=\int\varphi_n$

No.
Date. / /

$|I_n - I_m| \le \int_E |\varphi_n - \varphi_m| = \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n - \varphi_m| + \int_{E-A_\varepsilon} |\varphi_n - \varphi_m| \le \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n - \varphi_m| + 2M\, m(E-A_\varepsilon)$

$\forall \delta > 0$. 当 $n.m$ 大. $|\varphi_n - \varphi_m| < \delta$. $\forall x \in A_\varepsilon$

$|I_n - I_m| \le m(E)\delta + 2M\varepsilon$ 故 $\{I_n\}$ 为 Cauchy 列. 收敛.

若 $f=0$ φ_n 在 A_ε 上一致收敛到 0

故 $|I_n| \le \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n| + \int_{E-A_\varepsilon} |\varphi_n| \le \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n| + M\, m(E-A_\varepsilon) \to 0$ $I_n \to 0$

定义 若 $m(E) < \infty$ f 有界 $\operatorname{supp} f \subset E$ 定义 $\int f = \lim\limits_{n\to\infty} \int \varphi(x)$

其中 $\{\varphi_n\}$ 为任意简单函数满足 $\operatorname{supp}\varphi_n \subset \operatorname{supp} f$ $|\varphi_n| \le M$ $\varphi_n \to f$ a.e

引理. 上述定义是合理的

证. 设 $\{\psi_n\}$ 是另一组 令 $\eta_n = \varphi_n - \psi_n$ 故 $\eta_n \xrightarrow{a.e} 0$ 有界

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int \eta_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n$

例. $f(x) = x^2$. 通过定义计算 Lebesgue 积分 $\int_{[0,1]} x^2 dx$

$\forall n \in \mathbb{N}$ 将 $[0,1]$ 分为 n 份 $E_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$ $i=1,2\cdots n$

定义 $h_n(x) = \sum\limits_i (\frac{i-1}{n})^2 \chi_{E_i}(x)$ 则 $h_n(x) \ge 0$ $h_n(x) \le f(x)$

当 $n\to\infty$ $h_n(x) \to f(x)$

$\Rightarrow \int_{[0,1]} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int h_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_i (\frac{i-1}{n})^2 m(E_i)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_i (\frac{i-1}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}$

定理(有界收敛定理) 设 $\{f_n\}$ 可测 $\operatorname{supp} f \subset E$ E 可测 $m(E) < \infty$.

$\{f_n\}$ 一致有界 $(|f_n| \le M)$ $f_n \to f$ a.e 于 E. 则 f a.e 有界可测函数. 且

$\lim\limits_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,dx = 0$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = \int f$

证. 令 $F = E(f_n \to f)$ 则 $m(E-F) = 0$

由 $f_n \to f$ 在 F 上 则 f 在 F 上可测. 故在 E 上可测.

故可假设 f_n 在 E 上处处收敛到 f

由 Egorov 定理. $\forall \varepsilon > 0$. $\exists$ 闭 A_ε. $m(E-A_\varepsilon) < \varepsilon$. $f_n \rightrightarrows f$ 在 A_ε 上

No.
Date. / /

$|I_n - I_m| \le \int_E |\varphi_n - \varphi_m| = \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n - \varphi_m| + \int_{E-A_\varepsilon} |\varphi_n - \varphi_m| \le \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n - \varphi_m| + 2M\, m(E-A_\varepsilon)$

$\forall \delta > 0$. 当 n, m 大. $|\varphi_n - \varphi_m| < \delta$. $\forall x \in A_\varepsilon$

$|I_n - I_m| \le m(E)\delta + 2M\varepsilon$ 故 $\{I_n\}$ 为 Cauchy 列. 收敛.

若 $f=0$ φ_n 在 A_ε 上一致收敛到 0

故 $|I_n| \le \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n| + \int_{E-A_\varepsilon} |\varphi_n| \le \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n| + M\, m(E-A_\varepsilon) \to 0$ $I_n \to 0$

定义 若 $m(E) < \infty$ f 有界 $\operatorname{supp} f \subset E$ 定义 $\int f = \lim_{n\to\infty} \int \varphi(x)$

其中 $\{\varphi_n\}$ 为任意简单函数满足 $\operatorname{supp}\varphi_n \subset \operatorname{supp} f$ $|\varphi_n| \le M$ $\varphi_n \to f$ a.e

引理. 上述定义是合理的

证. 设 $\{\psi_n\}$ 是另一组 令 $\eta_n = \varphi_n - \psi_n$ 故 $\eta_n \xrightarrow{a.e} 0$ 有界

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int \eta_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \psi_n$

例. $f(x) = x^2$. 通过定义计算 Lebesgue 积分 $\int_{[0,1]} x^2 dx$

$\forall n \in \mathbb{N}$ 将 $[0,1]$ 分为 n 份 $E_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$ $i = 1, 2 \cdots n$

定义 $h_n(x) = \sum_i (\frac{i-1}{n})^2 \chi_{E_i}(x)$ 则 $h_n(x) \ge 0$ $h_n(x) \le f(x)$

当 $n \to \infty$ $h_n(x) \to f(x)$

$\Rightarrow \int_{[0,1]} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int h_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_i (\frac{i-1}{n})^2 m(E_i)$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_i (\frac{i-1}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}$

定理(有界收敛定理) 设 $\{f_n\}$ 可测 $\operatorname{supp} f \subset E$ E 可测 $m(E) < \infty$.

$\{f_n\}$ 一致有界 $(|f_n| \le M)$ $f_n \to f$ a.e 于 E. 则 f a.e 有界可测函数. 且

$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| dx = 0$ 即 $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$

证. 令 $F = E(f_n \to f)$ 则 $m(E-F) = 0$

由 $f_n \to f$ 在 F 上 则 f 在 F 上可测. 故在 E 上可测.

故可假设 f_n 在 E 上处处收敛到 f

由 Egorov 定理. $\forall \varepsilon > 0$. $\exists$ 闭 A_ε. $m(E-A_\varepsilon) < \varepsilon$. $f_n \rightrightarrows f$ 在 A_ε 上

No.
Date. / /

$$\int_E |f_n - f| = \int_{A_\varepsilon} |f_n - f| + \int_{E-A_\varepsilon} |f_n - f|$$
$$\le \delta\, m(A_\varepsilon) + 2M\, m(E-A_\varepsilon) \to 0 .$$

推论. 若 $m(E)<\infty$. f在E上非负有界可测 $\int_E f=0$ 则 $f=0$ a.e 于 E.

证. 令 $E_k = E(f \ge \frac{1}{k})$.

则 $\frac{1}{k}\chi_{E_k} \le f(x)$ 左右两边同时积分.

$\frac{1}{k} m(E_k) \le \int f(x)\,dx = 0 \quad \Rightarrow m(E_k)=0$

$\Rightarrow E(f>0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \le 0$

Lebesgue 积分和 Riemann 积分关系.

回忆. $f(x)$ 定义在 $[a.b]$ 上. 划分 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 令 $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$

$|\Delta| = \max\limits_i \Delta_i$ 令 $M_i = \sup\{f(x) \mid x\in [x_{i-1}, x_i]\}$. $m_i = \inf\{f(x) \mid x\in [x_{i-1}, x_i]\}$

$\lim\limits_{|\Delta|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta_i = \lim\limits_{|\Delta|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta_i$ 则称 $f(x)$ 在 $[a.b]$ 上是 Riemann 可积的. 上述极限定义为 f 在 $[a.b]$ 上的积分.

引理. 若 $f(x)$ $[a,b]$上 Riemann 可积. 则存在简单(或阶梯)函数 $\{\varphi_n\}$ 与 $\{\psi_n\}$

满足 $|\varphi_n|\le M$ $|\psi_n|\le M$ $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)\le\cdots\le f(x)\le\cdots\le\psi_2(x)\le\psi_1(x)$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n = \lim\limits_{n\to\infty}\psi_n$ a.e 于 $[a,b]$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int\psi_n = \int_a^b f(x)\,dx$

定理. 设$f(x)$在 $[a.b]$上 Riemann 可积. 则$f(x)$可测. 且 $\int_{[a,b]}^{R} f(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{L} f(x)\,dx$

证 由引理知 $\lim\int_{[a,b]}^{R}\varphi_n(x)\,dx = \lim\int_{[a,b]}^{R}\psi_n(x) = \int_{[a,b]}^{R} f(x)\,dx \quad \varphi_n\le f\le\psi_n$.

由 φ_n 是阶梯函数 $\int_{[a,b]}^{R}\varphi_n(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{L}\varphi_n(x)\,dx \quad \int_{[a,b]}^{R}\psi_n(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{L}\psi_n(x)\,dx$

令 $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x) \quad \psi(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)$

则 $\varphi.\psi$ 可测 $\varphi\le f\le\psi$ a.e. E

由$\{\varphi_n\}$. $\{\psi_n\}$有界. 由有界收敛定理

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[a,b]}^{L}\varphi_n(x) = \int_{[a,b]}^{L}\varphi(x) \quad \lim\limits_{n\to\infty}\int_{[a,b]}^{L}\psi_n(x) = \int_{[a,b]}^{L}\psi(x)$

$\Rightarrow \int_{[a,b]}^{L}(\varphi(x)-\psi(x))\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x)=\psi(x)$ a.e 于 E

No.
Date. / /

故 $f=\psi(x)=\varphi(x)$ a.e 于 $[a,b]$ ⇒ f 可测.

故 $\int_{[a,b]}^{L} f(x)dx=\int_{[a,b]}^{L}\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}^{L}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}^{R}\varphi_n(x)=\int_{[a,b]}^{R}f(x)dx$

例. 设 $D(x)=\begin{cases}1 & 若x\in\mathbb{Q}\\ 0 & 若x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$ 设 E 可测. $m(E)<\infty$ $E=[0,1]$

则 $\int_E D(x)dx=1\cdot m(E\cap\mathbb{Q})+0\cdot m(E\cap\mathbb{Q}^c)=0$

但 $D(x)$ 在 E 上不 Riemann 可积

第三步. 非负可测函数积分.

定义①设 E 可测. $m(E)$ 可为无限 f 在 E 上非负可测且 f 可为 ∞. 定义

$\int_E f=\sup_h\{\int_{\mathrm{supp}\,h}h \mid 0\le h\le f$ $\mathrm{supp}\,h\subset E$. h 有界 可测. 且 $\mathrm{supp}\,h$ 测度有限$\}$

②若 $\int_E f<\infty$ 则称 f 在 E 上是 Lebesgue 可积的

性质 ①线性 $\int_E(af+bg)=a\int_E f+b\int_E g$ $a.b>0$

② 可加性 $\int_{E\cup F}f=\int_E f+\int_F f$ $(E\cap F=\phi)$

③ 单调性 若 $f\le g$ a.e 于 E 则 $\int_E f\le\int_E g$

④ 若 g 在 E 上可积. $0\le f\le g$ 则 f 也在 g 上可积.

⑤ 若 f 在 E 上可积. 则 f 在 E 上几乎处处有限.

⑥ 若 $\int_E f=0$ 则 $f(x)=0$ a.e 于 E.

证 ① 设 $a=b=1$. 设 $\varphi\le f$. $\psi\le g$

则 $\varphi+\psi\le f+g$ ⇒ $\int\varphi+\int\psi\le\int(f+g)$

对 φ 和 ψ 分别取 sup ⇒ $\int f+\int g\le\int(f+g)$

另一边 设 $\eta\le f+g$ 要证 $\int\eta\le\int f+\int g$

定义 $\eta_1=\min\{f,\eta\}$

$\eta_2=\eta-\eta_1=\begin{cases}\eta-f\le g & f\le\eta\\ 0 & f\ge\eta\end{cases}$

故 $\eta_2\le g$

⇒ $\int\eta=\int(\eta_1+\eta_2)=\int\eta_1+\int\eta_2\le\int f+\int g$

取 η 上确界 $\int(f+g)\le\int f+\int g$ ⇒ $\int(f+g)=\int f+\int g$

No.
Date. / /

⑤ 若令 $E_k = E(f > k)$ $E_\infty = E(f = \infty)$

则 $\int_E f \geq \int_{E_k} f > k\, m(E_k)$

$\Rightarrow m(E_k) < \frac{1}{k}\int_E f$

由于 $E_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$

$\Rightarrow m(E_\infty) \leq m(E_k) < \frac{1}{k}\int_E f \to 0 \quad (k\to\infty)$

$\Rightarrow m(E_\infty) = 0 \Rightarrow f$ 几乎处处有限

⑥ 令 $E_k = E(f > \frac{1}{k})$

$\Rightarrow \int_E f \geq \int_{E_k} f \geq \frac{1}{k} m(E_k) \quad \Rightarrow m(E_k) = 0$

说明 Chebyshev 不等式 若 $f(x)$ 在 E 上非负可积. $a>0$ 则 $m(E(f \geq a)) \leq \frac{1}{a}\int_E f(x)dx$

问题 若 $f_n \geq 0$ $f_n \to f$ a.e 是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n = \int f$?

例. 设 $E = \mathbb{R}$. $f_n(x) = \begin{cases} n & 0<x<\frac{1}{n} \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$ 则 $f_n(x) \to f = 0$

$\int_E f_n(x) = 1 \quad \int_E f = 0 \quad$ ✗

定理. (Fatou 引理). 若 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上非负可测函数列. 且 $f_n \to f$ a.e 于 E

则 $\int_E f \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} \int_E f_n$

证. 设 $0 \leq g \leq f$. g 是有界可测函数. $m(\mathrm{supp}\, g)$ 有限.

设 $g \leq M$. 令 $g_n = \min\{g, f_n(x)\} \leq g$. 故 $\{g_n\}$ 有界 且 $g_n \to g$ a.e 于 E

由有界收敛定理 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E g_n = \int_E g$

由 g_n 的定义 $\int_E g_n \leq \int_E f_n$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E g_n \leq \varliminf\limits_{n\to\infty}\int_E f_n$

$\qquad\quad \| $

$\int_E g(x)$ 左边取上确界得

$\int_E f \leq \varliminf\limits_{n\to\infty}\int_E f_n$.

Wengu 文谷

L^1 可积函数

定义 设 f 在 R^d 中可积. 定义 $\|f\| = \|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |f| dx$ 有限 $\in L^1(\mathbb{R}^d)$

性质 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 则有

① $\|af\|_{L^1} = |a| \cdot \|f\|_{L^1} \quad \forall a \in \mathbb{C}$

② $\|f+g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$

③ $\|f\|_{L^1} = 0 \iff f = 0 \quad a.e$

④ $d(f,g) = \|f-g\|_{L^1}$ 是 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 上的度量 即满足

(a) $d(f,g) \ge 0$. 且 $d(f,g) = 0 \iff f = g \quad a.e$

(b) $d(f,g) = d(g,f)$

(c). $d(f,g) \le d(f,h) + d(g,h) \quad \forall f,g,h \in L^1(\mathbb{R}^d)$

定义 (V,d) 称为完备 即对 V 中任意 Cauchy 列 $\{x_k\}$. $\exists x \in V$. 使 $d(x_k, x) \to 0$

定理 $(L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|)$ 是完备的

证. 设 $\{f_k\}$ 是 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中 Cauchy 列. $\forall \varepsilon > 0. \exists N > 0.$ $\forall n, m \ge N.$ $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$

① 取 $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ $\exists n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 使 $\forall m, n \ge n_k$ 时 $\|f_n - f_m\| < \varepsilon_k$

特别地 $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| \le \frac{1}{2^k}$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < \infty$

② 令 $g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

故 $g(x)$ 可积. 几乎处处有限 级数 $f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ 几乎处处收敛

记和函数 $f(x)$. 前 p 项和 $f_{n_{p+1}}$. 故 $f_{n_p} \to f(x)$ a.e

又 $|f(x)| \le g$. 故 $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$

③ $|f_{n_p} - f| \le 2g$ 由控制收敛定理 $\|f_{n_p} - f\|_{L^1} \to 0$

由于 $\{f_n\}$ Cauchy 列. $\forall \varepsilon > 0.$ $\exists N.$ $\forall m, n \ge N.$ $|f_n - f_m| < \varepsilon$

取 k 大使 $n_k > N.$ $\|f_{n_k} - f\|_{L^1} < \varepsilon.$ $n > N$ 时

$\|f_n - f\| \le \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\| < 2\varepsilon$.

推论. 若 $f_n \xrightarrow{L^1} f$ 则存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 使 $f_{n_k} \to f$ a.e

定义. 一族可积函数 $\mathcal{F}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中稠密. 若 $\forall f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists g\in\mathcal{F}$. 使
$\|f-g\|_{L^1}<\varepsilon$.

定理. 下列函数集合在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中稠密

① 简单函数 ② 阶梯函数 ③ 具有紧支集的连续函数

证. 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 则 $f=f^+-f^-$. 只需考虑 $f\geq 0$ 即可.

①. 由定理 4.1. 存在非负简单函数列 $\{\varphi_k\}$. $\varphi_k\nearrow f$ a.e.

由单调收敛定理. $\lim\limits_{k\to\infty}\int\varphi_k=\int f \Rightarrow \int|f-\varphi_k|\to 0$

② $\forall f\in L^1$. 由定理 4.1 与 ①. $\exists g=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}$ $\{E_i\}$ 不交且有界(证明里有) $\int|f-g|<\varepsilon$

引理. 对任意可测 E. $m(E)<\infty$. 存在有限个不交方体的并 G. 使 $m(E\triangle G)<\varepsilon$.

故对 E_i 存在阶梯函数 G_i $m(E_i\triangle G_i)<\varepsilon'$

$\int|\chi_{E_i}(x)-\chi_{G_i}(x)|=m(E_i\triangle G_i)<\varepsilon'$

$\int|g-\sum a_i\chi_{G_i}|=\int|\sum_{i=1}^n a_i(\chi_{E_i}-\chi_{G_i})| \leq \max\limits_i|a_i|\,n\cdot\varepsilon'<\varepsilon$

故 $\int|f-\sum a_i\chi_{G_i}|\leq\int|f-g|+\int|g-\sum a_i\chi_{G_i}| \leq 2\varepsilon$

引理证明. 由定理 3.4. $m(E)<\infty$. $\exists$ 有限个闭方体 $\{Q_j\}_{j=1}^N$

使 $F=\bigcup_{j=1}^N Q_j$ $m(E\triangle F)<\varepsilon$. 将 Q_j 分割. 有限个几乎不交方体 R_j $F=\bigcup_{j=1}^M R_j$

将 R_j 缩小至 $\tilde{R}_j$ 可使 $m(E\triangle(\bigcup_{j=1}^M\tilde{R}_j))<\varepsilon$ 令 $G=\bigcup_{j=1}^M\tilde{R}_j$

③ 只要证. 若 R 为方体. $\chi_R(x)$ 可用具有紧支集的连续函数逼近

若 $d=1$. $R=[a,b]$ 令 $g(x)=\begin{cases}1 & a\leq x\leq b\\ 0 & x\leq a-\varepsilon \text{ 或 } x\geq b+\varepsilon\\ \text{线性}\end{cases}$

若 $d=2$. 设 $R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ $\chi_R(x,y)=\chi_{[a_1,b_1]}(x)\,\chi_{[a_2,b_2]}(y)$

$g(x_1,x_2)=g(x_1)\cdot g(x_2)$

$\|g-\chi_R\|=\int|g_1g_2-\chi_1\chi_2|\leq\int|g_2||\chi_1-g_1|+\int|\chi_1||g_2-\chi_2|\leq\int|\chi_1-g_1|+\int|\chi_2-g_2|<2\varepsilon$

例1. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx=0$

证. 令 $f(x)=\chi_{[a,b]}$ 则当 $n\to\infty$

$\int_a^b f(x)\cos nx=\int_a^b\cos nx=\frac{1}{n}(\sin nb-\sin na)\to 0$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ 阶梯 g $\int_a^b|f-g|<\frac{\varepsilon}{2}$. $\exists N>0$ $\forall n>N$ 有 $|\int_a^b g(x)\cos nx|<\frac{\varepsilon}{2}$

$|\int_a^b f(x)\cos nx|\leq|\int_a^b(f(x)-g(x))\cos nx|+|\int_a^b g\cos nx|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

不变性质

设 f 定义在 $\mathbb{R}^d$ 上 $f_h(x)=f(x-h)$

性质 ① 若 f 可积，则 f_h 可积，且 $\int f(x)=\int f_h(x)$

证 ① 若 $f=\chi_E$，E 可测，$f_h(x)=\chi_{E_h}(x)$。 $E_h=\{x+h \mid x\in E\}$

$\int f=\int \chi_E=m(E)=m(E_h)=\int f_h$

若 f 非负，∃简单 $\{\varphi_k\}$，$\varphi_k\nearrow f$ a.e. $\cdot(\varphi_k)_h\nearrow f_h$ a.e.

故 $\int f=\lim\limits_{k}\int\varphi_k=\lim\limits_{k}\int(\varphi_k)_h=\int f_h$

若 f 可积 $f=f^+-f^-$ $\int f=\int f^+-\int f^-=\int(f^+)_h-\int(f^-)_h=\int f_h$

② 若 f 可积，则 $f(\delta x)$，$(\delta>0)$ $f(x)$ 可积，且 $\delta^d\int f(x)\,dx=\int f(x)\,dx$

③ 若 f,g 在 $\mathbb{R}^d$ 上可测 $y\to f(x-y)g(y)$ 可积，则 $y\to f(y)g(x-y)$ 可积，

且 $\int f(x-y)g(y)\,dy=\int f(y)g(x-y)\,dy$.

证 ③ 对 $y\to f(x-y)g(y)$

令 $y\to -y$ $y\to f(x+y)g(-y)$ 可积。

令 $y\to y-x$ $y\to f(x+y-x)g(-(y-x))=f(y)g(x-y)$ 可积。

④ 若 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 则 $\lim\limits_{h\to 0}\|f_h-f\|_{L}=0$.

证. $\forall\varepsilon>0$ ∃具有紧支集的连续函数 g，使 $\|f-g\|_{L^1}<\varepsilon$

$\|f_h-f\|_{L^1}\le\|f_h-g_h\|+\|g-f\|_{L^1}+\|g_h-g\|_{L^1}$

$\le 2\varepsilon+\|g_h-g\|_{L^1}$

由于 g 上有紧支集 故 $\forall\varepsilon'>0$，$\exists\delta>0$. $|x-x'|<\delta$. $|g(x)-g(x')|<\varepsilon'$

$\operatorname{supp} g\subset B_R(0)$ 取 $h<\delta$. $|g_h(x)-g|<\varepsilon'$

$\int|g_h-g|\le\int_{B_R(0)}|g_h-g|<\varepsilon'\,\mathrm{Vol}(B_R(0))<\varepsilon$

例. 设 $\{g_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 可测且

① $|g_n(x)|\le M$

② $\forall c\in[a,b]$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[a,c]}g_n(x)=0$

则 $\forall[a,b]$ 可积 f 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[a,b]}f(x)g_n(x)=0$

Fubini 定理

问题. 当 $f(x,y)$ 满足什么条件时.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\right)dx$$

例. $f(x,y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$ $\quad I = [1,+\infty) \times [0,1]$

$$\int_0^1 dy \int_1^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 e^{-y}\,\frac{1-e^{-y}}{y}\,dy > 0$$

$$\int_1^{+\infty} dx \int_0^1 f(x,y)\,dy = -\int_1^{+\infty} e^{-x}\,\frac{1-e^{-x}}{x}\,dx < 0$$

$x \quad y$

$\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ $\quad d = d_1 + d_2.$ $\quad d_1 d_2 \geq 0$

定义① 设 $f(x,y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 上的函数. 固定 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ f 为截函数

$f^y(x) = f(x,y)$ 固定 $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ $\quad f_x(y) = f(x,y)$

② 若 E 是 $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 上集合. E 的截口为 $E^y = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} \mid (x,y) \in E\}$. $E_x = \{y \in \mathbb{R}^{d_2} \mid (x,y) \in E\}$.

定理 (Fubini) 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 上可积. 则对几乎所有 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$. 有

① $f^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上可积 (从而可测)

② $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx$ 在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上可积 (从而可测)

③ $\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dx\,dy$ (故有限)

(由对称性. 上述结论对 $f_x(y)$ 也成立)

说明 ① 并不是显然的. 即 $f(x,y)$ 可测 $f_x(y)$ 并不一定可测

令 $N \subset \mathbb{R}$ 是不可测集 $Z \subset \mathbb{R}$ 是零测集 则 $Z \times N$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中零测集

$f(x,y) = \chi_{Z\times N}(x,y) = \chi_Z(x)\cdot\chi_N(y)$ $\qquad$ 则 $f_x(y)$ 不可测

证明. 设 $\mathcal{F}$ 为定理中三条结论都成立的可积函数集合.

下证 $\mathcal{F}$ 包含所有的可积函数

分 6 步. ① $\mathcal{F}$ 对有限线性运算下封闭.

② $\mathcal{F}$ 对极限运算封闭 (要假设 f 可积)

③ $\mathcal{F}$ 包含具有有限测度的 G_δ 集特征函数

④ $\mathcal{F}$ 包含零测集的特征函数

⑤ $\mathcal{F}$包含有限测度集合的特征函数

⑥ $\mathcal{F}$包含所有可积函数

① 设 $\{f_k(x,y)\}_{k=1}^{N} \subset \mathcal{F}$ $\forall 1 \le k \le N$. $\exists A_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$. $m(A_k)=0$

当 $y \notin A_k$ 时. $f_k(x,y)$ 满足条件. 令 $A=\bigcup_{k=1}^{N} A_k$. $m(A)=0$

故当 $y \in A^c$ 时. $f_k(x,y)$ 满足条件. 由积分线性性

$f_k(x,y)$ 的线性组合属于$\mathcal{F}$

② 设 $\{f_k\} \subset \mathcal{F}$. 且 $f_k \nearrow f$ 或 $f_k \searrow f$. 只要考虑 $f_k \nearrow f$

可设 f_k 非负. 否则考虑 $f_k - f_1$ 即可.

由单调收敛定理 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_k(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dx\,dy$.

由假 $\forall k$ $\exists A_k$. $m(A_k)=0$

当 $y \notin A_k$ 时 f_k^y 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中可积. 令 $A=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. $m(A)=0$

$y \notin A$ 时 对 $\forall k$. $f_k^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中可积.

$g_k(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x)\,dx$. $\nearrow$ $g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx$ （单调收敛定理）

由假设 $g_k(x)$ 可积. 故可测.

同样由单调收敛 $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y)\,dy \nearrow \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)\,dy$ $(k\to\infty)$

由 $f_k \subset \mathcal{F}$. $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x,y)\,dx\,dy$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dx\,dy.$$

由于 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积. 故右边有限. $g(y)$ 可积 故几乎处处有限

故 $f^y(x)$ 对几乎所有 y 可积. 且 $\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dx\,dy$

③ 若 E 是 G_δ 集 且 $m(E)<\infty$. 则 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

1) 若 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是有界开方体. $E = Q_1 \times Q_2$ Q_1, Q_2 分别是 $\mathbb{R}^{d_1}$ $\mathbb{R}^{d_2}$ 中开方体

固定 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ 则 $\chi_E(x,y) = \chi_{Q_1}(x)\chi_{Q_2}(y)$ 是 x 可测 可积函数

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x,y)\,dx = \begin{cases} m(Q_1) & y \in Q_2 \\ 0 & y \notin Q_2 \end{cases} = m(Q_1)\cdot\chi_{Q_2}(y)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)\,dy = m(Q_1)\cdot m(Q_2) = m(Q) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dx\,dy.$$

2) 若 E 是某闭方体的边界的子集 证 $\chi_E \in \mathcal{F}$

由于 E 在 $\mathbb{R}^d$ 中测度为0 $\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x,y)\,dx\,dy = 0$

由于对几乎所有 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ E^y 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中测度为0

故 $g(y)=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\chi_{E}(x,y)\,dx$ a.e y 故 $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)\,dy=0$

$\Rightarrow \chi_E(x,y)\in \mathcal{F}$.

3) 设E是几乎不交的闭方体的有限并. $E=\bigcup_{j=1}^{N} Q_j$

Q_j 方体. $\tilde{Q}_j$ 是 Q_j 内部. 则 χ_E 是 $\chi_{\tilde{Q}_j}$ 和 χ_{A_j} 的线性组合

其中 A_j 是 Q_j 边界的子集 $\chi_E\in\mathcal{F}$.

4) 若 E开 且 $m(E)<\infty$. 则 $\chi_E\in\mathcal{F}$.

由于E是可数个几乎不交的闭方体的并 $E=\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$

令 $f_k(x,y)=\sum_{j=1}^{k}\chi_{Q_j}(x,y)$ $f_k\nearrow\chi_E$ 由 $m(E)<\infty$.

$\Rightarrow \chi_E$ 可积. 故 $\chi_E\in\mathcal{F}$

5) 若E是 G_δ 集 $m(E)<\infty$. $\chi_E\in\mathcal{F}$.

由 G_δ 定义 ∃开集 $\tilde{Q}_1,\tilde{Q}_2,\cdots$ $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}\tilde{Q}_k$

由于 $m(E)<\infty$. ∃开集 Q_0 $E\subset Q_0$ $m(Q_0)<\infty$. 令 $Q_k=Q_0\cap(\bigcap_{j=1}^{k}\tilde{Q}_j)$

Q_k 有限测度 $Q_1\supset Q_2\supset Q_3\cdots$ $E=\bigcap_{j=1}^{\infty}Q_j$

故 $f_k=\chi_{Q_k}\searrow f=\chi_E$ $\Rightarrow \chi_E\in\mathcal{F}$

⑥ 若E为零测集 $\chi_E\in\mathcal{F}$.

由于E可测 故取 G_δ 集 G $E\subset G$. $m(G)=0$.

由于 $\chi_G\in\mathcal{F}$. 故 $\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\chi_G(x,y)\,dx\right)dy=\int\chi_G=0$

故 $\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\chi_G(x,y)\,dx=0$ a.e. y.

对几乎处处 y $m(G^y)=0$. 由 $E^y\subset G^y$ $m(E^y)=0$

故 $\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\chi_E(x,y)=0$. a.e y 故 $\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\chi_E(x,y)\,dx\right)dy=0$

$\Rightarrow \chi_E\in\mathcal{F}$

⑤ 若 $E\subset\mathbb{R}^d$ 可测 $m(E)<\infty$. 则 $\chi_E\in\mathcal{F}$.

存在有限测度 G_δ 集 $G\supset E$ $m(G-E)=0$

故 $\chi_E=\chi_G-\chi_{G-E}\in\mathcal{F}$

⑥ 若 f 可积 $f=f^+-f^-$ f^+,f^- 非负可积 只要证 f 非负可积

∃简单函数 φ_k $\varphi_k\nearrow f$ 由 $\varphi_k\in\mathcal{F}$. $\Rightarrow f\in\mathcal{F}$.

定理（Torelli）设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ 非负可测 则几乎所有 $y\in\mathbb{R}^{d_2}$

有 ① $f^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上非负可测

② $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx$ 关于 y 非负可测

③ $\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx\right)dy=\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dx\,dy$ （可能 $<\infty$）

证 设 $f_k(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & 若\ |(x,y)|<k,\ 且\ f(x,y)<k \\ 0 & 其它\end{cases}$

则 f_k 可积，且 $f_k\le f_{k+1}$，$f_k\nearrow f$

由 Fubini：$\exists$ 零测集 $E_k\subset\mathbb{R}^{d_2}$，$\forall y\in E_k^c$ $f_k^y(x)$ 可测

令 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ $\forall y\in E^c$，$\forall k$，$f_k^y(x)$ 可测 $\Rightarrow$ $f^y(x)$ 可测

由单调收敛 $\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dx$ （$y\in E^c$）

由 Fubini：$y\in E^c$，$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)\,dx$ 可测 $\Rightarrow$ $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx$ 关于 y 可测

由单调收敛 $\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)\,dx\right)dy\to\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx\right)dy$.

$\quad\| \text{Fubini} \qquad\qquad\qquad \|$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_k(x,y)\,dx\,dy\to\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dx\,dy$$

例. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

解 令 $f(x,y)=ye^{-(1+x^2)y^2}$

由 Torelli 定理 $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy$

左 $=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$

右 $=\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\left(\int_0^{+\infty} ye^{-x^2y^2}dx\right)dy=\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-z^2}dz\right)dy=\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$

例. 求 $\int_0^{+\infty}(e^{-x}-e^{-3x})\frac{\cos x}{x}\,dx$

解 $I=\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx\int_3^1\frac{\partial}{\partial y}(e^{-xy})\,dy$

$=\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x}\left(\int_1^3 xe^{-xy}\,dy\right)dx$

$=\int_0^{\infty}\cos x\left(\int_1^3 e^{-xy}\,dy\right)dx$

令 $F(x,y)=\cos x\,e^{-xy}$ $\quad |F(x,y)|\le e^{-xy}$

$\int_{[0,\infty)\times[1,3]} e^{-xy}\,dx\,dy \overset{\text{Torelli}}{=} \int_1^3 dy\int_0^{\infty} e^{-xy}\,dx=\int_1^3\frac{1}{y}\,dy<+\infty$

由 Fubini 定理 $I=\int_1^3 dy\int_1^\infty (e^{-xy}\cos x)dx=\int_1^3 \frac{y}{1+y^2}dy=\frac{1}{2}\log 3$

推论 若 E 是 $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ 可测，则对几乎所有 $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ $E^y=\{x\in\mathbb{R}^{d_1}\mid (x,y)\in E\}$ 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中可测。且 $m(E^y)$ 关于 y 可测函数 $m(E)=\int_{\mathbb{R}^{d_2}} m(E^y)dy$

证. 设 $f=\chi_E(x,y)$. 则 f 在 $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ 可测

由 Torelli 定理 对几乎所有 $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ $f^y(x)$ 上可测

故 $E^y=\mathbb{R}^{d_1}(f^y(x)>\frac{1}{2})$ 可测. 由 Torelli (2). $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)dx$ 可测 $=m(E^y)$

由 Torelli (3) $\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dxdy=\int_{\mathbb{R}^{d_2}}(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)dx)dy$

即 $m(E)=\int_{\mathbb{R}^{d_2}} m(E^y)dy$.

说明 若 $\forall y$. E^y 可测. 则 E 不一定可测.

例. 设 $N\subset\mathbb{R}$ 不可测 $E=[0,1]\times N$

则 $E^y=\begin{cases}[0,1] & y\in N\\ \emptyset & y\notin N\end{cases}$

但若 E 可测. $\forall x\in[0,1]$ $E^x=N$ 不可测 矛盾.

命题 设 $E=E_1\times E_2$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中可测. $m_*(E_2)>0$ 则 E_1 可测.

证 取 $F\subset\mathbb{R}^{d_2}$ 使 $\forall y\in F$ E^y 可测. 且 $m(F^c)=0$

则 $m_*(F\cap E_2)=m_*(F\cap E_2)+m_*(F^c\cap E_2)\geq m_*(E_2)>0$

故 $F\cap E_2\neq\emptyset$. $\exists y\in F\cap E_2$ E^y 可测.

由于 $E^y=\{x\in\mathbb{R}^{d_1}\mid (x,y)\in E=E_1\times E_2\}=E_1$ 故 E_1 可测.

引理 设 $E_1\subset\mathbb{R}^{d_1}$ $E_2\subset\mathbb{R}^{d_2}$ 则 $m_*(E_1\times E_2)\leq m_*(E_1)m_*(E_2)$

若 $m_*(E_1)=0$ 或 $m_*(E_2)=0$. 则 $m_*(E_1\times E_2)=0$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ 方体 $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ $\{Q_l'\}_{l=1}^\infty$ 使 $E_1\subset\bigcup_{k=1}^\infty Q_k$. $E_2\subset\bigcup_{l=1}^\infty Q_l'$

$\sum_{k=1}^\infty |Q_k|\leq m_*(E_1)+\varepsilon$ $\sum_{l=1}^\infty |Q_l'|\leq m_*(E_2)+\varepsilon$.

由于 $E_1\times E_2\subset\bigcup_{k,l}(Q_k\times Q_l')$ 故 $m_*(E_1\times E_2)\leq\sum_{k,l}|Q_k\times Q_l'|$

$\leq(m_*(E_1)+\varepsilon)(m_*(E_2)+\varepsilon)$ ①

若 $m_*(E_1)\neq 0$, $m_*(E_2)\neq 0$, ① $\leq m_*(E_1)m_*(E_2)(1+\frac{\varepsilon}{m_*(E_1)})(1+\frac{\varepsilon}{m_*(E_2)})\to m_*(E_1)\cdot m_*(E_2)$

若 $m_*(E_1)=0$. 令 $E_2^j = E_2 \cap B_j(0)$ 则 $m_*(E_2^j)<\infty$.

$m_*(E_1 \times E_2^j) \le (m_*(E_1)+\varepsilon)(m_*(E_2^j)+\varepsilon) \to 0$

故 $m_*(E_1 \times E_2^j)=0$ $j\to\infty$ $m_*(E_1 \times E_2)=0$

命题. 设 $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ 都可测. 则 $E=E_1\times E_2$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中可测 $m(E)=m(E_1)\cdot m(E_2)$

若某个 E_i 零测 则 $m(E)=0$

证. 首先证 E 可测

取 G_δ 集满足 $E_1 \subset G_1$. $E_2 \subset G_2$ $m(G_1 - E_1)=0$ $m(G_2-E_2)=0$

则 $G_1 \times G_2 = (E_1\times E_2) \cup (E_1 \times (G_2 - E_2)) \cup ((G_1-E_1)\times E_2)$

$\Rightarrow m(G_1\times G_2 - E_1\times E_2)=0 \Rightarrow E_1\times E_2$ 可测

由 Tonelli 定理 $m(E_1\times E_2) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{E_1\times E_2} = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \chi_{E_1} \cdot \chi_{E_2}\, dy \right) dx$

$= m(E_1)\times m(E_2)$

推论 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中可测. 令 $\tilde f(x,y)=f(x)$ 则 $\tilde f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ 中可测

证 $\forall a\in\mathbb{R}$. $(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})(\tilde f>a) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R} \mid \tilde f(x,y)>a\}$

$= \underbrace{\{x\in\mathbb{R}^{d_1} \mid f(x)>a\}}_{\text{可测}} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{可测}}$ 故 $\tilde f(x,y)$ 可测

Lebesgue 积分

推论 设 $f(x)$ $\mathbb{R}^d$ 非负 定义 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}.\ 0\le y\le f(x)\}$

则 ① f 在 $\mathbb{R}^d$ 中可测 $\Leftrightarrow$ A 在 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ 中可测 ② 若 ① 成立 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = m(A)$

证 ① f 可测 故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ 中可测 y 在 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ 中可测 $F(x,y)=f(x)-y$

$A = \mathbb{R}^{d+1}(y\ge 0) \cap \mathbb{R}^{d+1}(F(x,y)\ge 0)$ 可测.

若 A 可测. 则 $m(A_x)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中零测函数

$A_x = \{y\in\mathbb{R} \mid (x,y)\in A\} = \{y\in\mathbb{R} \mid 0\le y\le f(x)\} = [0, f(x)]$

$m(A_x)=f(x)$. 故 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中可测函数

② f 可测 时 $m(A) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \chi_A(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx$

命题 设 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上可测函数 则 $\tilde{f}(x,y)=f(x-y)$ 是 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 可测

证. ① 设 $A\subset\mathbb{R}^d$ 定义 $\tilde{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d,\ x-y\in A\}$.

设 $a\in\mathbb{R}$. $E=\{z\in\mathbb{R}^d.\ f(z)<a\}$. f 可测 $\Rightarrow$ E 可测.

$\tilde{E}=\{(x,y)\mid x-y\in E\}=\{(x,y)\mid \tilde{f}(x,y)<a\}$

只要证 $\tilde{E}$ 可测.

②. 若 $O\subset\mathbb{R}^d$ 开. 则 $\tilde{O}$ 是开集

定义 $g:\ \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ $\quad g$ 是连续函数 $\tilde{O}=g^{-1}(O)$ 开

$(x,y)\quad x-y.$

③ 若 $G\subset\mathbb{R}^d$ 是 G_δ 集 则 G_δ 是 G_δ 集

$G=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}O_j\quad O_j$ 开. $g^{-1}(G)=g^{-1}(\bigcap\limits_j O_j)=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}g^{-1}(O_j)=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\tilde{O}_j$

④ 若 $O\subset\mathbb{R}^d$ 开. 则 $m(\tilde{O}\cap C_k)=m(O)\cdot m(B_k)$

其中 $B_k=\{y\in\mathbb{R}^d\mid |y|<k\}\quad C_k=\mathbb{R}^d\times B_k\ (k\in\mathbb{N})$

由于 C_k 可测 由 $\chi_{\tilde{O}\cap C_k}(x,y)=\chi_{\tilde{O}}(x,y)\chi_{B_k}(y)=\chi_O(x-y)\chi_{B_k}(y)$

$$m(\tilde{O}\cap C_k)=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\chi_O(x-y)\chi_{B_k}(y)\,dx\right)dy=\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{B_k}(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d}\chi_O(x-y)\,dx\right)dy$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{B_k}(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d}\chi_O(x)\,dx\right)dy=m(O)\,m(B_k)$$

⑤. 若 $m(N)=0$. 则 $m(\tilde{N})=0$

若 $m(N)=0$. $\exists$ 开 O_n. $N\subset O_n$. $m(O_n)\to 0\quad \tilde{N}\subset\tilde{O}_n\quad \tilde{N}\cap C_k\subset\tilde{O}_n\cap C_k$

故 $m(\tilde{N}\cap C_k)=0\quad k\to\infty\quad m(\tilde{N})=0$

⑥ 由于 E 可测. $E=G\setminus N\quad G$ 是 G_δ 集 N 零测

$\tilde{E}=\tilde{G}-\tilde{N}\quad \tilde{G}$ 是 G_δ 集 $\tilde{N}$ 是零测、 $\Rightarrow\tilde{E}$ 可测

Fourier 变换

定义. f 定义在 $\mathbb{R}^d$ 上. 定义 Fourier 变换为 $\quad\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx$

定义 Fourier 逆变换 $\quad f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(\xi)\,e^{2\pi ix\xi}\,d\xi$

命题. 若 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 则 $\hat{f}(\xi)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中连续且有界.

证. $|f(x)e^{-2\pi ix\xi}|\le|f(x)|$ 故 $|\hat{f}(\xi)|\le\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,dx=\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

连续性 只要证 $\lim\limits_{\xi\to\xi_0}\hat{f}(\xi)=\hat{f}(\xi_0)$

由 $|f(x)e^{-2\pi i x\xi}|\le|f(x)|$ $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$

由 Lebesgue 控制收敛定理.

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx=\int_{\mathbb{R}^d}\lim_{\xi\to\xi_0}f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-2\pi i x\xi_0}dx$$

定理 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 则 Fourier 逆变换 对几乎所有 x 成立

推论. $\hat{f}(\xi)=0$. $\forall\xi\in\mathbb{R}^d$ 则. $f(x)=0$ a.e. x.

引理1 若 $f.g\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则 $\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\hat{g}(y)dy$

证. 由于 $\hat{f}.\hat{g}$ 有界且 $f.g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 故左右积分均可积.

令 $F(\xi,y)=g(\xi)f(y)e^{-2\pi i y\xi}$ 在 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 中可测.

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}F(\xi,y)=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|g(\xi)|\,|f(y)|d\xi\,dy=\int_{\mathbb{R}^d}|g(\xi)|d\xi\cdot\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)|dy<+\infty.$$

故 F 可积. 由 Fubini.

$$\int_{\mathbb{R}^d}g(\xi)d\xi\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)dx\int_{\mathbb{R}^d}g(\xi)e^{-2\pi i x\xi}d\xi$$

引理2. 若 $g(\xi)=e^{-\pi\delta|\xi|^2}e^{2\pi i x\xi}$ $\delta>0$. $x.\xi\in\mathbb{R}^d$

则 $\hat{g}(y)=\delta^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\delta}}=k_\delta(x-y)$

证. ① 若 $f(x)=e^{-\pi|x|^2}$, 则 $\hat{f}(\xi)=e^{-\pi|\xi|^2}$ $d=1$

令 $F(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi|x|^2}e^{-2\pi i x\xi}dx$ $F(0)=1$

$$\partial_{\xi}F(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi|x|^2}(-2\pi i x_1)e^{-2\pi i x\xi}dx$$

$$=i\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_x(e^{-\pi|x|^2}))e^{-2\pi i x\xi}dx$$

$$=i\left[e^{-\pi|x|^2}e^{-2\pi i x\xi}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi|x|^2}(-2\pi i\xi)e^{-2\pi i\xi x}dx\right]$$

$$=-2\pi\xi F(\xi)\qquad F'(\xi)=-2\pi\xi F(\xi)\implies F(\xi)=e^{-\pi\xi^2}$$

② $\hat{g}(y)=\int_{\mathbb{R}^d}g(\xi)e^{-2\pi i y\xi}d\xi$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi\delta|\xi|^2}e^{-2\pi i(y-x)\xi}d\xi$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi|\sqrt{\delta}\xi|^2}e^{-2\pi i\left(\frac{y-x}{\sqrt{\delta}}\right)\sqrt{\delta}\xi}d\xi$$

令 $\xi' = \sqrt{\delta}\,\xi$　　$t = \frac{y-x}{\sqrt{\delta}}$

$$\hat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\pi|\xi'|^2} \cdot e^{-2\pi i t \xi'} \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^d d\xi' = \delta^{-\frac{d}{2}} e^{-\pi\frac{|y-x|^2}{\delta}}$$

引理3. $K_\delta(y)$ 满足

① $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(y)\, dy = 1$

② $\forall \eta > 0$. $\lim\limits_{\delta\to 0} \int_{|y|>\eta} K_\delta(y) dy = 0$

证明. ① $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} \delta^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{\delta}} dy \overset{x=\frac{y}{\delta}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|x|^2} dx = 1$

② $\int_{|y|>\eta} K_\delta(y)\,dy = \int_{|y|>\eta} \delta^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{\delta}} dy \overset{x=\frac{y}{\delta}}{=} \int_{|x|>\frac{\eta}{\delta}} e^{-\pi|x|^2} dx \to 0 \ (\delta \to 0)$

定理的证明.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, e^{-\pi\delta|\xi|^2} e^{2\pi i x\xi} d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\hat{g}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, K_\delta(x-y)\, dy.$$

由 $\hat{f} \in L^1$ 由控制收敛定理. $\delta\to 0$ 时 左 $\to \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\xi} d\xi$

由右 $\overset{y\to y+x}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(y+x) K_\delta(x-(y+x))\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) K_\delta(-y)\,dy \overset{y\to -y}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) K_\delta(y)\,dy$

令 $\Delta_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) K_\delta(y)\,dy - f(x)$　下证 $\|\Delta_\delta(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \to 0$ $(\delta \to 0)$

$\Delta_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x)) K_\delta(y)\,dy$

$\int_{\mathbb{R}^d} |\Delta_\delta(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|\, K_\delta(y)\,dy \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(y)\,dy \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|\,dx$

由 L^1 的绝对连续性 $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \eta > 0$. $\forall |y| < \eta$ 有 $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|\,dx < \varepsilon$

故 $\int_{\mathbb{R}^d} |\Delta_\delta(x)|\,dx \le \varepsilon \cdot \int_{|y|\le\eta} K_\delta(y) + \int_{|y|>\eta} K_\delta(y) \|f(x-y) - f(x)\|_{L^1}\,dy$

$\le \varepsilon \cdot \int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(y)\,dy + 2\|f(x)\|_{L^1} \int_{|y|>\eta} K_\delta(y)\,dy \le 2\varepsilon$ （当 $\delta \to 0$ 时）

故 $\lim\limits_{\delta\to 0} \|\Delta_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$. 故 $\exists$ 子列 $\delta_i \to 0$　$\Delta_{\delta_i}(x) \to 0$ a.e. (Corollary 2.3)

定义 若 $f(x), g(x)$ $\mathbb{R}^d$ 中可测. 若积分 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$. 存在. 则定义为 $(f*g)(x)$ f 与 g 的卷积.

定理. 若 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 则 $(f*g)(x)$ 对 a.e $x \in \mathbb{R}^d$ 存在

且 $f*g$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积. $\int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|\,dx$.

证. 设 $f \geq 0$. $g \geq 0$. 由 Torelli 定理.

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^d} dt \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,dx \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(t)\,dt \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(t)\,dt \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx .$$

由于 $f, g \in L^1$. 故 $f*g \in L^1$. 从而 $f*g$ 几乎处处有限 $\|f*g\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$

在一般情形. $|f*g| \le |f|*|g|$

故 $\|f*g\|_{L^1} \le \||f|*|g|\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$

例. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $g(x)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中有界可测. 则 $F(x) = (f*g)(x)$ 是一致连续函数

证 设 $|g(x)| \le M$. $\forall x$.

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x+h-y) - f(x-y))g(y)\,dy \right|$$

$$\le M \int_{\mathbb{R}^d} |f(t+h) - f(t)|\,dt .$$

由 L^1 绝对连续性 上式 $\to 0$. 当 $h \to 0$

例 $L^1(\mathbb{R})$ 中不存在 $u(x)$. 使得对一切 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 有 $(u*f)(x) = f(x)$ a.e $x \in \mathbb{R}$.

证. 设 $u(x) \in L^1(\mathbb{R})$ 使上式成立 对 $\forall \delta > 0$. 取 $f = \chi_{[-\delta,\delta]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$

$$f(x) = (u*f)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-y)f(y)\,dy = \int_{-\delta}^{\delta} u(x-y)\,dy \overset{t=x-y}{=\!=} \int_{x-\delta}^{x+\delta} u(t)\,dt$$

$\exists x_0 \in [-\delta, \delta]$ $1 = f(x_0) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} u(t)\,dt \le \int_{-2\delta}^{2\delta} u(t)\,dt$

由 u 可积

故 $\exists\, \delta$ 很小 使 $\int_{-2\delta}^{2\delta} |u(t)|\,dt < 1$. 矛盾

问题 1. 若 f 在 $[a,b]$ 可积 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. 是否有 $F'=f$ a.e ?

2. $[a,b]$ 上函数 F 满足什么 时. F' 存在. 可积. $F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,dt$

$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ 令 $I=[x,x+h]$.

$=\frac{1}{m(I)}\int_I f(t)\,dt$. 希望 $\lim\limits_{\substack{m(I)\to 0\\ x\in I}} \frac{1}{m(I)}\int_I f(t)\,dt=f(x)$

当 f 在 x 连续时

$\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0\quad |y-x|<\delta.\quad |f(y)-f(x)|<\varepsilon$

$\left|f(x)-\frac{1}{m(I)}\int_I f(t)\,dt\right|=\left|\frac{1}{m(I)}\int_I (f(x)-f(y))\,dy\right|\le\varepsilon,$

No.

Date. / /

微分.

$f(x)$ 可积 $F(x)=\int_{[a,x]} f(t)\,dt$ 求 $F'(x)$ $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{1}{h}\int_{[x,x+h]} f(t)\,dt$

令 $I=[x,x+h]$. $h=|I|=m(I)$

求 $\lim\limits_{\substack{x\in I\\ |I|\to 0}} \dfrac{1}{m(I)}\int_I f(t)\,dt = f(x)$?

命题. f 在 x 连续时等式成立

$\left|\dfrac{1}{|I|}\int_I (f(t)-f(x))\,dt\right| \le \dfrac{1}{|I|}\int_I |f(t)-f(x)|\,dt$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0$ s.t $\forall |x-t|<\delta$ 时 $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ 右 $<\varepsilon$

定义 Hardy - Littlewood 极大函数

f 在 $\mathbb{R}^d$ 可积, $f^*(x)=\sup\limits_{x\in B}\dfrac{1}{m(B)}\int_B |f(y)|\,dy$ $x\in\mathbb{R}^d$

定理. f 在 $\mathbb{R}^d$ 可积

① f^* 可测

② $f^*<\infty$ a.e. x

③ $m(\mathbb{R}^d(f^*>\alpha)) \le \dfrac{A}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

说明 (a) 由于可测函数几乎处处连续 故 $f^*(x)\ge|f(x)|$ a.e ✗

(b) $f^*(x)$ 不会比 $|f|$ 大太多

证明 ① 只要 $E_\alpha=\mathbb{R}^d(f^*>\alpha)$ 是开集

$\forall\ x\in E_\alpha$. $f^*(x)>\alpha$ 由定义 $\exists B\in\mathbb{R}^d$

$\dfrac{1}{m(B)}\int_B |f(y)|\,dy>\alpha$.

$\forall x'\in B$ $f^*(x')=\sup\limits_{x'\in B'}\dfrac{1}{m(B')}\int_{B'}|f(y)|\,dy \ge \dfrac{1}{m(B)}\int_B |f(y)|\,dy>\alpha$.

故 $B\in E_\alpha$. 从而 E_α 开

③ ⇒ ② $m(\mathbb{R}^d(f^*>\infty)) \le m(\mathbb{R}^d(f^*>\alpha)) \le \dfrac{A}{\alpha}\|f\|_{L^d}\to 0$

证 ③

引理 (Vitali) 设 $\mathcal{F}=\{B_1\cdots B_N\}$ $\mathbb{R}^d$ 中有限个开球的集合.

$\exists$ 不交的子列 $\{B_{i_1}\ B_{i_2}\cdots B_{i_k}\}\subset B$. 使得

No.

Date.　　/　　/

$$m(\bigcup_{k=1}^{N} B_k) \le 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j})$$

引理证明. 若 $B \cap B' \ne \phi$ 且 $r_B \ge r_{B'}$ 则 $B' \subset \tilde{B}$

其中 $\tilde{B}$ 表示以 B 的球心为球心, $3r_B$ 为半径的球

① 在 F 中取最大的球 B_{i_1} 在 F 中去掉所有与 B_{i_1} 相交的球

则去掉的球包含在 $\tilde{B}_{i_1}$ 中

② 重复以上操作. 得到 $B_{i_1} \cdots B_{i_k}$.

③ F 中每个球 B 都与某个 B_{i_j} 相交. 且 $B \subset \tilde{B}_{i_j}$

则 $m(\bigcup_{j=1}^{N} B_j) \le m(\bigcup_{j=1}^{k} \tilde{B}_{i_j}) \le \sum_{j=1}^{k} m(\tilde{B}_{i_j}) = 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j})$

③ 的证明

$E_\alpha = \mathbb{R}^d(f^* > \alpha)$　$\forall x \in E_\alpha$. $\exists B_x$. $x \in B_x$　$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| dy > \alpha$

$m(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)| dy$.

固定紧 $K \subset E_\alpha$.　$K \subset \bigcup_{\alpha} B_\alpha$.

故 $\exists$ 有限个球　$K \subset \bigcup_{l=1}^{N} B_l$.　由引理知

存在 $B_{i_1} \cdots B_{i_k}$ 检使 $m(K) \le m(\bigcup_{l=1}^{N} B_l) \le 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j})$

$$\le 3^d \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha} \int_{B_{i_j}} |f(y)| dy \le \frac{3^d}{\alpha} \|f\|$$

Lebesgue 积分定理. 设 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积. 则

$$\lim_{\substack{m(B) \to 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy = f(x) \quad a.e.\ x.$$

证 ① $\forall \alpha > 0$. 令 $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \overline{\lim_{\substack{m(B) \to 0 \\ x \in B}}} |\frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy - f(x)| > 2\alpha\}$.

只要证 $m(E_\alpha) = 0$.　此时 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}}$　$m(E) = 0$

② 对连续函数 g. 等式成立　$\lim_{\substack{x \in B \\ m(B) \to 0}} \frac{1}{m(B)} \int_B g(y) dy = g(x)$

$\forall \varepsilon > 0$　$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$　$\exists$ 有紧支撑连续函数 g. 使 $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$.

故 $\frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy - f(x) = \frac{1}{m(B)} \int_B (f(y) - g(y)) dy + (\frac{1}{m(B)} \int_B g(y) dy - g(x)) + (g(x) - f(x))$

$\overline{\lim_{\substack{m(B) \to 0 \\ x \in B}}} |\frac{1}{m(B)} \int_B (f(y) - g(y)) dy| \le (f - g)^*(x) + |g(x) - f(x)|$

No.

Date. / /

令 $F_\alpha=\{x \mid (f-g)^* > \alpha\}$ $G_\alpha=\{x \mid |f-g|>\alpha\}$

故 $E_\alpha \subset F_\alpha \cup G_\alpha$

$m(F_\alpha) \le \frac{A}{\alpha}\|f-g\|_{L^1}$ $m(G_\alpha) \le \frac{1}{\alpha}\|f-g\|_{L^1}$

故 $m(E_\alpha) \le (\frac{A}{\alpha}+\frac{1}{\alpha})\varepsilon$ $\varepsilon \downarrow 0 \Rightarrow m(E_\alpha)=0$. 得证.

推论 若 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积 则 $f^*(x) \ge |f(x)|$ a.e 于 $\mathbb{R}^d$.

证. 对 $|f|$ 用 lebesgue 积分定理

定义. 对 $\mathbb{R}^d$ 中可测函数 $f(x)$ 若对任意球 $B \subseteq \mathbb{R}^d$ $f(x)\chi_B(x)$ 可积. 则称 $f(x)$ 是局部可积函数 记为 $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

例 $f(x)=e^{|x|}$, $|x|^{-\frac{1}{2}}$, 1

定义 (Lebesgue 密度点) 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测 $x \in \mathbb{R}^d$. 称 x 为 Lebesgue 密度点,

若 $\lim\limits_{\substack{m(B)\to 0 \\ x\in B}} \frac{m(B\cap E)}{m(B)}=1$

推论. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测. 则

① 几乎所有 E 中的点都是 E 的 Lebesgue 密度点

② 几乎所有 E^c 中的点都不是 E 的 Lebesgue 密度点.

证. 令 $f(x)=\chi_E(x)$.

$$\Rightarrow \lim_{\substack{m(B)\to 0 \\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\,dy = f(x) \quad \text{a.e } x.$$

定义 设 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ 若 $x \in \mathbb{R}^d$ $f(x)$ 有限. 且

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0 \\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(x)-f(y)|\,dy=0$$

称 x 是 Lebesgue 点. Lebesgue 点 的集合是 Lebesgue 集

例. 连续点是 Lebesgue 点.

No.
Date. / /

命题 若 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ 则几乎所有 $\mathbb{R}^d$ 中的点都是 Lebesgue 点.

证. $\forall r\in\mathbb{Q}$ 考虑 $f(x)-r$ 存在零测集 E_r

$$x\notin E_r \quad \lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-r|\,dy = |f(x)-r|$$

令 $E=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} E_r$. $m(E)=0$ 设 $x\notin E$ $|f(x)|<\infty$.

$\forall \varepsilon>0$. $\exists r\in\mathbb{Q}$. 使 $|f(x)-r|<\varepsilon$

$$\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,dy \le \frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-r|\,dy + |f(x)-r| \to 2|f(x)-r| \le 2\varepsilon$$

故 $\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,dy = 0$ a.e.

问题 球能否换成其他集合

定义 $\{U_\alpha\}$ 正则收缩到 $\bar{x}$. 若 $\exists c>0$. 使 $\forall U_\alpha$. $\exists$ 球 B $\bar{x}\in B$ $U_\alpha\subset B$

$m(U_\alpha)\ge c\,m(B)$

注 包含 x 的所有正方体满足条件.

定理. 设 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ 若 $\{U_\alpha\}$ 正则收缩到 $\bar{x}$. $\bar{x}$ 是 Lebesgue 点.

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(U_\alpha)}\int_{U_\alpha} f(y)\,dy = f(\bar{x})$$

证 $\frac{1}{m(U_\alpha)}\int_{U(\alpha)} |f(y)-f(x)| \le \frac{1}{c\,m(B)}\int_B |f(y)-f(x)| \to 0$ ($\bar{x}$ 是 Lebesgue 点.)

定理 设 f 是 $[0,b]$ 可积. $F(x)=\int_{[0,x]} f(y)\,dy$ 则对 $f(x)$ 的所有 Lebesgue 点 x. 有
$F'(x)=f(x)$ 从而 $F'(x)=f(x)$ a.e. 于 $[0,b]$

No.
Date. / /

Fourier 变化. $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$ $\quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi$

若 $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ 则逆变换公式 a.e 成立

证明回忆 考虑 $g(\xi) = e^{-\pi\delta|\xi|^2} e^{2\pi i x\xi}$

$$\hat{g}(y) = \delta^{-\frac{d}{2}} e^{-\pi\frac{|x-y|^2}{\delta}} \quad (= K_\delta(x-y))$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \hat{g}(y) dy.$$

令 $\delta \to 0$ 只要证 $\int_{\mathbb{R}^d} f(y) K_\delta(x-y) dy \to f(x)$ a.e

问题 在什么条件下. $f * K_\delta$ 能收敛到 f 当 $\delta \to 0$ 时

定义 $K_\delta(x)$ 称为 good kernel 若 $\forall \delta > 0$

① $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x) dx = 1$

② $\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)| dx \le A$

③ $\forall \eta > 0$ $\int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)| dx \to 0 \quad (\delta \to 0)$

定义. $K_\delta(x)$ 称为恒等逼近. 若

① $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x) dx = 1$

② $|K_\delta(x)| \le \frac{A}{\delta^d} \quad (\forall \delta > 0)$

③ $|K_\delta(x)| \le \frac{A\delta}{|x|^{1+d}} \quad \forall \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

命题. 恒等逼近 ⇒ good kernel.

证 ① ✓

② $\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)| dx = \int_{|x|\le\delta} |K_\delta(x)| dx + \int_{|x|\ge\delta} |K_\delta(x)| dx = I_1 + I_2$

$$|I_1| \le \int_{|x|\le\delta} \frac{A}{\delta^d} = \frac{A}{\delta^d} m(B_\delta) = A'$$

$$|I_2| \le \int_{|x|\ge\delta} \frac{A\delta}{|x|^{1+d}} = A\delta \lim_{N\to\infty} \int_{\delta\le|x|\le N} \frac{1}{|x|^{1+d}} dx$$

$$= A\delta \lim_{N\to\infty} \int_\delta^N \frac{1}{r^{1+d}} r^{d-1} dr = A\delta \int_\delta^\infty \frac{1}{r^2} dr \le A\delta \cdot \frac{1}{\delta} = A$$

或 令 $A_k = \{x \in \mathbb{R}^d \mid 2^k\delta \le |x| < 2^{k+1}\delta\}$ $\quad A = \{1 \le |x| \le 2\}$

令 $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \quad a_k(x) = \frac{1}{(2^k\delta)^{1+d}} \chi_{A_k}(x)$

则 $f(x) = \frac{1}{|x|^{1+d}} \le g(x)$ 从而 $\int f \le \int g$

No.
Date. / /

$$\int g = \sum_{k=0}^{\infty} a_k m(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} m(A)\cdot a_k\cdot(2^k\delta)^d = m(A)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2^k\delta)^d}{(2^k\delta)^{d+1}} \le \frac{C}{\delta}$$

再代入到 I_2 中即可

③ $\int_{|x|\ge\eta} |k_\delta(x)| \le A\delta\int_{|x|\ge\eta}\frac{dx}{|x|^{1+d}} \le \frac{A'\delta}{\eta} \to 0 \quad (\delta\to 0)$

例. 设 φ 是 $\mathbb{R}^d$ 非负有界 $\operatorname{supp}\varphi \subset \{|x|<1\}$, 且 $\int_{\mathbb{R}^d}\varphi = 1$.

则令 $k_\delta(x) = \delta^{-d}\varphi(\frac{x}{\delta})$ 则 $k_\delta(x)$ 是恒等逼近

验证 ② $|k_\delta(x)| = \delta^{-d}\varphi(\frac{x}{\delta}) \le \frac{A}{\delta^d}$

③ $|k_\delta(x)| = \delta^{-d}\varphi(\frac{x}{\delta}) \overset{y=\frac{x}{\delta}}{=\!=} |\frac{x}{y}|^{-d}\varphi(y)$

$= \frac{\frac{|x|}{|y|}\cdot|y|^{d+1}\varphi(y)}{|x|^{d+1}} \le \frac{A\delta}{|x|^{d+1}}$

例 $P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$ $\quad k_\delta(x) = P_\delta(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\delta}{x^2+\delta^2}$

定理. 设 $\{k_\delta\}_{\delta>0}$ 是恒等逼近. f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积, 则对 f 的 Lebesgue 点,

$(f*k_\delta)(x) \to f(x) \quad \delta\to 0.$ (*)

从而 (*) 对几乎处处 x 成立.

证. $|f*k_\delta(x) - f(x)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |(f(x-y)-f(x)||k_\delta(y)|\,dy$ (**)

引理 设 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积. x 是 f 的 Lebesgue 点. 设 $A_r = \frac{1}{r^d}\int_{|y|\le r}|f(x-y)-f(x)|dy$

则 (1). A_r 关于 $r>0$ 连续. 且 $A_r \to 0$ $(r\to 0)$

(2) A_r 有界. $\sup_{r>0} A(r) \le M$.

引理的证明. 令 $g(r) = \int_{|y|\le r}|f(x-y)-f(x)|dy$

$g(r+h) - g(r) = \int_{r\le|y|\le r+h}|f(x-y)-f(x)|dy$

由 $|f(x-y)-f(x)|$ 关于 y 可积, 积分区域测度 $\to 0$ $(h\to 0)$

由绝对连续性. $g(r+h)-g(r)\to 0$ $(h\to 0)$ 故 g 连续

由 x 是 Lebesgue 点. 从而 $\lim_{r\to 0} A_r = 0$.

(2). 由 (1). A_r 在 $[0,1]$ 上有界

No.
Date. / /

当 $r>1$ 时 $A_r \le \frac{1}{r^d}\int_{|y|\le r}|f(x-y)|dy + \frac{1}{r^d}\int_{|y|\le r}|f(x)|\,dy$

$\le \frac{1}{1}\cdot\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + c\cdot|f(x)| < +\infty.$

定理的证明. 估计 (**)

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)|\,|k_\delta(y)|\,dy = \int_{|y|\le\delta} + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k\delta\le|y|<2^{k+1}\delta} = I_0 + \sum_{k=0}^{\infty} I_k$$

$$I_0 = \int_{|y|\le\delta}|f(x-y)-f(x)|\,|k_\delta(y)|\,dy \le \frac{c}{\delta^d}\int_{|y|\le\delta}|f(x-y)-f(x)|\,dy \le cA(\delta)$$

$$I_k = \int_{2^k\delta\le|y|<2^{k+1}\delta}|f(x-y)-f(x)|\,|k_\delta(y)|\,dy \le \frac{c\delta}{(2^k\delta)^{1+d}}\int_{2^k\delta\le|y|\le 2^{k+1}\delta}|f(x-y)-f(x)|\,dy$$

$$\le \frac{c\delta}{(2^k\delta)^{1+d}}(2^{k+1}\delta)^d A(2^{k+1}\delta) \le c'2^{-k}A(2^{k+1}\delta)$$

故 $|f*k_\delta(x)-f(x)| \le cA(\delta) + c\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}A(2^{k+1}\delta)$

$$= cA'(\delta) + c'\sum_{k=0}^{N-1}2^{-k}A(2^{k+1}\delta) + c'\sum_{k\ge N}2^{-k}A(2^{k+1}\delta)$$

(先固定 N. 再 $\delta\to 0$) 上式 $\to 0$

定理. 设 f 在 $\mathbb{R}^d$ 可积. 且 $\{k_\delta\}_{\delta>0}$ 是恒等逼近. 则

$\forall\delta>0$ $f*k_\delta(x)$ 都可积. 且 $\|f*k_\delta(x)-f(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\to 0$ $(\delta\to 0)$

证. $f*k_\delta(x)-f(x) = \int_{\mathbb{R}^d}(f(x-y)-f(x))\,k_\delta(y)\,dy$

$$\|f*k_\delta(x)-f(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le \int_{\mathbb{R}^d}dx\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)|\,|k_\delta(y)|\,dy$$

$$\overset{\text{Torelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}|k_\delta(y)|\,dy\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)|\,dx$$

$$= \int_{|y|>\eta}|k_\delta(y)|\,\|f_y-f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \int_{|y|\le\eta}|k_\delta(y)|\,\|f_y-f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\,dy$$

绝对连续性

$$\le 2\|f\|_{L^1}\underbrace{\int_{|y|>\eta}|k_\delta(y)|\,dy}_{\to 0} + \varepsilon\cdot\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}|k_\delta(y)|\,dy}_{\le A}\ \ \varepsilon\to 0$$

函数的微分.

问题 $F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)\,dx$ 是否成立.

① $F'(x)$ 是否存在.

② $F'(x)$ 是否可积.

No.
Date.　　/　　/

有界变差.

C. $(x(t), y(t))$　$a\le t\le b$.　$x(t), y(t)$ 连续

划分 T: $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$

$L(T)=\sum_{j=1}^{n}|P_jP_{j-1}|$　曲线长度 $L_\gamma=\sup_T L(T)$

$$L(T)=\sum_{j=1}^{n}\left((x(t_j)-x(t_{j-1}))^2+(y(t_j)-y(t_{j-1}))^2\right)^{\frac12}$$

$$\le\sum_{j=1}^{n}|x(t_j)-x(t_{j-1})|+\sum_{j=1}^{n}|y(t_j)-y(t_{j-1})|$$

由 $L(T)\ge\max\left\{\sum_{j=1}^{n}|x(t_j)-x(t_{j-1})|,\ \sum_{j=1}^{n}|y(t_j)-y(t_{j-1})|\right\}$.

故 $L(T)$ 有界 $\Leftrightarrow$ $\sum_{j=1}^{n}|x(t_j)-x(t_{j-1})|$ 与 $\sum_{j=1}^{n}|y(t_j)-y(t_{j-1})|$ 有界

定义 设 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 函数. $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$ 划分. 定义 $F(x)$ 关于该划分的变差为 $\sum_{j=1}^{N}|F(x_j)-F(x_{j-1})|$　F 称为有界变差函数. 若对所有划分 F 的变差有一致上界. 即 $\exists M>0$. $\forall T$　$\sum_{j=1}^{N}|F(x_j)-F(x_{j-1})|\le M$.

故曲线 C 可求长 $\Leftrightarrow$ $x(t)$. $y(t)$ 为 $[a,b]$ 上有界变差函数

例. 实值单调有界函数是有界变差函数. ✓

处处可导且导函数有界变差函数

$|F'(x)|\le M \Rightarrow |F(x)-F(y)|\le M|x-y|$

连续函数不一定有界变差

$F(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$　$(0<x\le1)$　$F(0)=0$

取 $0<\frac{2}{2n-1}<\frac{2}{2n-3}<\cdots<\frac{2}{5}<\frac{2}{3}\le1$

$$\sum_{i=1}^{n}|F(x_i)-F(x_{i-1})|\ge2\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\to+\infty.$$

全变差 $T_f(a,b)=\sup_T\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le M<+\infty$.

$P_f(a,b)=\sup_T\sum_{(+)}(f(x_i)-f(x_{i-1}))$　(+) 表示对 $f(x_i)\ge f(x_{i-1})$ 的 i 求和

$N_f(a,b)=\sup_T\sum_{(-)}-(f(x_i)-f(x_{i-1}))$　(-) 表示对 $f(x_i)<f(x_{i-1})$ 的 i 求和

则 $T_f(a,b)=N_f(a,b)+P_f(a,b)$

No.

Date. / /

引理. 设 f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数 $\forall x\in(a,b)$ 有

$$F(x)-F(a) = P_F(a,x) - N_F(a,x)$$

$$T_F(a,x) = P_F(a,x) + N_F(a,x)$$

证. $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ 划分. $a=t_0<\cdots<t_n=x$ 使

$$|P_F - \sum_{(+)}(F(t_j)-F(t_{j-1}))| < \varepsilon$$

$$|N_F - \sum_{(-)}-(F(t_j)-F(t_{j-1}))| < \varepsilon.$$

$$F(x)-F(a) = \sum_{(+)}(F(t_j)-F(t_{j-1})) - \sum_{(-)}-(F(t_j)-F(t_{j-1}))$$

故 $|F(x)-F(a) - (P_F(a,x)-N_F(a,x))| < 2\varepsilon$ $\varepsilon\to 0 \Rightarrow$ 相等.

由于 $\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})| = \sum_{(+)}(F(t_j)-F(t_{j-1})) + \sum_{(-)}-(F(t_j)-F(t_{j-1}))$

$$T_F \le P_F + N_F \le T_F$$ ✓

命题 ① 有界变差函数有界

② 若 $f\in BV[a,b]$. $a\in\mathbb{R}$. 则 $af\in BV[a,b]$.

$$T_{af}(a,b) = |a|T_f(a,b)$$

③ 若 $f,g\in BV[a,b]$ 则 $f+g\in BV[a,b]$. 且 $T_{f+g}(a,b)\le T_f(a,b)+T_g(a,b)$

证. ③ 对 $[a,b]$ 任一划分. $x_0<\cdots<x_n$

$$\sum_i |f(x_i)+g(x_i) - f(x_{i-1}) - g(x_{i-1})|$$

$$\le \sum_i |f(x_i)-f(x_{i-1})| + \sum_i |g(x_i)-g(x_{i-1})|$$

$\le T_f + T_g$ 左边再取 sup. $T_{f+g}\le T_f+T_g$

④ 若 $f,g\in BV[a,b]$ 则 $fg\in BV[a,b]$

⑤ 若 $f\in BV[a,b]$. $\forall c\in(a,b)$ 有 $f\in BV[a,c]$

且 $T_f(a,b) = T_f(a,c) + T_f(c,b)$

证. 对 $[a,c]$ 上的任一划分 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ $[c,d]$ 上划分 $\{x_i'\}_{i=0}^{m}$

合并成 $[a,b]$ 上划分.

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| + \sum_{i=0}^{m}|f(x_i')-f(x_{i-1}')| \le T_f(a,b)$$

$$\Rightarrow T_f(a,c)+T_f(c,b)\le T_f(a,b)$$

$\forall \varepsilon>0$. $\exists$ $[a,b]$ 的划分 $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ 使得

No.
Date. / /

$\sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \geq T_f(a.b) - \varepsilon$

设 $x_{k-1} < c \leq x_k$. 则 $\{x_0, x_1 \cdots x_{k-1}, c\}$ 是 $[a.c]$ 划分. $\{c \cdots x_n\}$ 是 $[c.b]$ 的划分

$T_f(a.b) - \varepsilon \leq \sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(c) - f(x_{k-1})|$

$+ |f(x_k) - f(c)| + \sum_{i=k}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$

$\varepsilon \downarrow 0. \Rightarrow T_f(a,b) \leq T_f(a.c) + T_f(c.b)$

$\leq T_f(a.c) + T_f(c.b)$

$\Rightarrow T_f(a.b) = T_f(a.c) + T_f(c.b)$

定理 $[a.b]$ 上的函数 f 是有界变差函数 $\Leftrightarrow$ f 是两个单增有界函数的差

证. "$\Leftarrow$" 若 $f = f_1 - f_2$ $f_1 . f_2$ 单增有界

$\Rightarrow f_1 f_2 \in BV[a.b]$ $\Rightarrow f = f_1 - f_2 \in BV[a.b]$

"$\Rightarrow$" 若 $f \in BV(a.b)$ 则令 $f_1(x) = P_f(a.x) + f(a)$

$f_2(x) = N_f(a.x)$

则 $f_1 - f_2 = f$ $f_1 . f_2 \uparrow$ 有界

定理. 若 F 为 $[a.b]$ 上 后面可去 连续 有界变差函数. 则 F 几乎处处可导

引理 (Sunrise) 设 G 是 $\mathbb{R}$ 上实值连续函数.

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists h = h_x > 0.$ 使 $G(x+h) > G(x)\}$.

若 $E \neq \phi$. 则 E 开. 故 E 为至多可数个不交的开区间的并.

设 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k . b_k)$ 若 $(a_k . b_k)$ 为有限开区间. 则有 $G(b_k) = G(a_k)$

引理的证明 E 开. $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k . b_k)$ 设 $(a_k . b_k)$ 有限

故 $a_k \notin E$. 故 $G(b_k) > G(a_k)$ 不成立

设 $G(b_k) < G(a_k)$ 由连续性. $\exists c \in (a_k . b_k)$

$G(c) = \frac{1}{2}(G(a_k) + G(b_k))$

由 G 连续 可取 c 与 b_k 最近 由 $c \in E$

$\exists d > c.$ 使 $G(d) > G(c)$

由于 $b_k \notin E$. 故 $\forall x > b_k$. 有 $G(x) \leq G(b_k) < \frac{1}{2}(G(b_k) + G(a_k))$

故 $d \in (c.b_k)$ $G(d) > G(c) > G(b_k)$ $\exists c' \in (d.b_k)$ $G(c) = G(c')$ 矛盾

推论. 设 G 是 $[a,b]$ 上实值连续函数 $E=\{x\in(a,b)\mid \exists h>0,\ G(x+h)>G(x)\}$

则 E 开. 若 E 非空, E 为至多可数不交的开区间的并.

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k) \quad a_k\neq a \text{ 时 } G(a_k)=G(b_k)$$

$$a_k=a \text{ 时 } G(a_k)\le G(b_k)$$

定理证明 ① 定义 $\Delta_h F(x)=\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$

Dini 数 $D^+F=\overline{\lim\limits_{h\to 0^+}}\,\Delta_h F(x)$ $\quad D_+F=\underline{\lim\limits_{h\to 0^+}}\,\Delta_h F(x)$

$D^-F=\overline{\lim\limits_{h\to 0^-}}\,\Delta_h F(x)$ $\quad D_-F=\underline{\lim\limits_{h\to 0^-}}\,\Delta_h F(x)$

则 $D_+F\le D^+F$ $\quad D_-F\le D^-F$.

要证 ⓐ $D^+F<\infty$ a.e.

ⓑ $D^+F\le D_-F$ a.e.

② 引理 若 (a)(b) 成立, 则四个 Dini 数几乎处处相等且有限

从而 $F'(x)$ 几乎处处存在

证. 只要证 $D^-F\le D_+F$ 即可 此时有

$$D^+F\overset{(b)}{\le} D_-F\le D^-F\overset{(假设)}{\le} D_+F\le D^+F\overset{(a)}{\le}\infty \text{ a.e.}$$

令 $G(x)=-F(-x)$ 则 $D^+G\le D_-G$. a.e.

引证 $D^+G=D^-F$. $\quad D_-G=D_+F$

$$D^+(G)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{-F(-x-h)-(-F(-x))}{h}\overset{y=-x}{=}\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{-F(y-h)-(-F(y))}{h}$$

$$\overset{h'=-h}{=}\overline{\lim_{h'\to 0^-}}\frac{F(y+h')-F(y)}{h'}=D^-F$$

③ 设 F 在 $[a,b]$ 上单增连续有界 $\Leftarrow$ ⓐ 的证明

设 $E_\gamma=\{x\in(a,b)\mid D^+F(x)>\gamma\}$

则 E_γ 可测 (证明在后面).

令 $G(x)=F(x)-\gamma x$. 在 $[a,b]$ 上用 Sunrise

$E=\{x\in(a,b)\mid \exists h>0.\ G(x+h)>G(x)\}$

$=\{x\in(a,b)\mid \exists h>0.\ F(x+h)-\gamma(x+h)>F(x)-\gamma(x)\}$

$=\{x\in(a,b)\mid \exists h>0\ \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}>\gamma\}$

No.

Date. / /

故 $E_r \subset E = \bigcup_k (a_k, b_k)$ 且 $G(b_k) \geq G(a_k)$

$F(b_k) - r b_k \geq F(a_k) - r a_k$ $F(b_k) - F(a_k) \geq r(b_k - a_k)$

从而 $m(E_r) \leq m(E) = \sum_k (b_k - a_k) \leq \frac{1}{r} \sum_k (F(b_k) - F(a_k)) \leq \frac{F(b) - F(a)}{r}$

令 $r \to \infty$ 知 $\lim_{r \to \infty} m(E_r) = 0$

$\{D^+F = \infty\} \subset E_r \Rightarrow D^+F < +\infty$ a.e

④ ⓑ的证明

设 $R > r$. 令 $E = \{x \in (a,b) \mid D^+F > R > r > D_-F\}$

只要证 $m(E) = 0$ 故由 R, r 任意性知 $D^+F \leq D_-F$ a.e

若 $m(E) > 0$ 由于 $\frac{R}{r} > 1$ ∃开集 O $E \subset O$. $m(O) < \frac{R}{r} m(E)$

设 $O = \bigcup_n I_n$ I_n 是两两不交的开区间

定义 $E_1 = \{x \in (a,b) \mid D_-F < r\}$

$E_2 = \{x \in (a,b) \mid D^+F > R\}$ 则 $E = E_1 \cap E_2$

1) $E_1 = \{x \in (a,b) \mid \varliminf_{x \to 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < r\}$

$\subset \{x \in (a,b) \mid \exists h < 0 \ \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < r\}$

$= \{x \in (a,b) \mid \exists h < 0 \ F(x+h) - F(x) > rh\}$ 令 $h' = -h > 0$

$= \{x \in (a,b) \mid \exists h' > 0 \ F(x-h') - F(x) > -rh'\}$ 令 $y = -x$

$= \{x \in (a,b) \mid \exists h' > 0 \ F(-y-h') - F(-y) > -rh'\}$

$= \{x \in (a,b) \mid \exists h' > 0 \ F(-y-h') + r(y+h') > F(-y) + ry\}$

令 $G(y) = F(-y) + ry$ $E_1 \subset \{x \in (a,b) \mid \exists h' > 0. \ G(y+h') > G(y) \ y = -x\} = E_1'$

对 $G(y)$ 在 $-I_n$ 上用 Sunrise 引理. $E_1' \cap I_n = \bigcup_k (a_k, b_k)$ (a_k, b_k) 不交

故 $E_1 \cap I_n \subset \bigcup_k (a_k, b_k) \subset I_n$.

且在 $(-b_k, -a_k)$ 上 $G(-a_k) \geq G(-b_k)$

即 $F(a_k) - r a_k \geq F(b_k) - r b_k$

$\Rightarrow F(b_k) - F(a_k) \leq r(b_k - a_k)$

2) $E_2 = \{x \in (a,b) \mid \varlimsup_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} > R\}$

$= \{x \in (a,b) \mid \exists h > 0 \ F(x+h) - R(x+h) > F(x) - R(x)\}$

令 $\tilde{G}(x) = F(x) - Rx$ $= \{x \in (a,b) \mid \tilde{G}(x+h) > \tilde{G}(x)\} = E_2'$

对 $\tilde{G}(x)$ 在 (a_k, b_k) 上用 Sunrise $E_2' \cap (a_k, b_k) = \bigcup_j (a_{k,j}, b_{k,j})$

且 $\tilde{G}(b_{k,j}) \geq \tilde{G}(a_{k,j})$ $E_2 \cap (a_k, b_k) \subset E_2' \cap (a_k, b_k) = \bigcup_j (a_{k,j}, b_{k,j})$

$F(b_{k,j}) - Rb_{k,j} \geq F(a_{k,j}) - Ra_{k,j}$

$F(b_{kj}) - F(a_{kj}) \geq R(b_{kj} - a_{kj})$

3). 令 $O_n = \bigcup_{k,j} (a_{kj}, b_{k,j}) \subset I_n$

$E \cap I_n = (E_1 \cap I_n) \cap E_2 \subset (\bigcup_k (a_k, b_k)) \cap E_2$

$= \bigcup_k (E_2 \cap (a_k, b_k)) = \bigcup_k (\bigcup_j (a_{kj}, b_{k,j})) = O_n \subset I_n$

综上 $E \cap I_n \subset O_n \subset I_n$

$m(O_n) = \sum_{k,j} (b_{k,j} - a_{k,j}) \leq \frac{1}{R} \sum_{k,j} (F(b_{k,j}) - F(a_{k,j}))$

$\leq \frac{1}{R} \sum_k (F(b_k) - F(a_k)) \leq \frac{r}{R} \sum_k (b_k - a_k) \leq \frac{r}{R} m(I_n)$

$m(E) = m(E \cap O) = \sum_n m(E \cap I_n) \leq \sum_n m(O_n) \leq \frac{r}{R} \sum_n m(I_n) = \frac{r}{R} m(O) < \frac{r}{R} \cdot \frac{R}{r} m(E)$

$\Rightarrow m(E) < m(E)$ 矛盾. 故 $m(E) = 0$

⑤ 下证. 若 F 在 $[a,b]$ 上连续则 D^+F 可测

将 F 延拓到 R 上. $F(x) = F(b)$ $x \geq b$ $F(x) = F(a)$ $x \leq a$

1). $\forall x \in R$. $D^+F(x) = \lim_{n \to \infty} \sup_{h \in (0, \frac{1}{n})} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ $(*)$

回忆 $D^+F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup_{h \in (0,\delta)} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$

$\forall \delta > 0$. 定义 $\alpha(\delta) = \sup_{h \in (0,\delta)} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$

若 $\delta_1 < \delta_2$ $\alpha(\delta_1) \leq \alpha(\delta_2)$ 故 $\lim_{\delta \to 0^+} \alpha(\delta)$ 存在 $\in \bar{R}$

故 $\lim_{\delta \to 0^+} \alpha(\delta) = \lim_{n \to \infty} \alpha(\frac{1}{n})$ 故 $(*)$ 成立

2). 下证 $\sup_{h \in (0, \frac{1}{n})} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap Q} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ 要变成可数个

左 $\geq$ 右 显然. 只要证 右 $\geq$ 左.

$\forall \varepsilon > 0$. 固定 $h \in (0, \frac{1}{n})$ 令 $l = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$

由于 $t \to \frac{F(x+t) - F(x)}{t}$ 在 $t = h$ 处连续 故 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$

$\left| \frac{F(x+t) - F(x)}{t} - l \right| < \varepsilon$. $\forall t \in (h-\delta, h+\delta)$

由Q稠密 $\forall t\in(h-\delta, h+\delta)\cap Q\cap(0,\frac1n)$ 有

$$左\le \frac{F(x+t)-F(x)}{t}+\varepsilon \le 右+\varepsilon$$

左边取 sup $\varepsilon\downarrow 0$ 左≤右 ✓

3). $D^+F = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{h\in(0,\frac1n)\cap Q} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

定义 $F_h(x)=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ 则 $F_h(x)$ 是 x 的连续函数

故 $\sup\limits_{h\in(0,\frac1n)\cap Q} F(x)$ 可测 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{h\in(0,\frac1n)\cap Q} F_h(x)$ 可测

推论. 若F连续且单增. 则 $F'(x)$ 几乎处处存在 且 $F'(x)$ 非负. 可测

$\int_a^b F'(x)dx \le F(b)-F(a)$ 若F有界. 则 $F'(x)$ 可积.

证. 考虑 $G_n(x)=\frac{F(x+\frac1n)-F(x)}{\frac1n}$ 则 $G_n(x)\to F'(x)$ a.e. $F'(x)$ 非负可测

(Fatou) $\int_a^b F'(x)dx \le \varliminf\limits_{n\to\infty}\int_a^b G_n(x)dx$

$\int_a^b G_n(x)dx = n\left(\int_a^b F(x+\frac1n)dx-\int_a^b F(x)dx\right)$ (连续延拓到R上)

$$= n\left[\int_b^{b+\frac1n}F(x)dx-\int_a^{a+\frac1n}F(x)dx\right] \xrightarrow[n\to\infty]{连续} F(b)-F(a)$$

去掉连续: ① 有界变差写为单增有界函数的差

② F单增有界. ∃ 跳跃函数 J. $F-J$ 连续

③ $J(x)$ 几乎处处可导

故结合定理知单调有界函数几乎处处可导

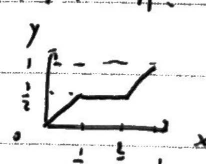
故有界变差函数几乎处处可导

例. Cantor-Lebesgue 函数 连续单增 $F:[0,1]\to[0,1]$ 满足 $F(0)=0$ $F(1)=1$

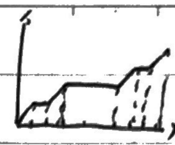
$F'(x)=0$ a.e. F 有界变差. 且 $\int_0^1 F'(x)dx < F(1)-F(0)$

Cantor集 $C=\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ C_n 为 2^n 个闭区间的并.

定义 $F_1(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \frac12 & x\in[\frac13,\frac23]\\ 1 & x=1\end{cases}$



$$F_2(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \frac{1}{4} & x\in[\frac{1}{9},\frac{2}{9}]\\ \frac{1}{2} & x\in(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\\ \frac{3}{4} & x\in[\frac{7}{9},\frac{8}{9}]\\ 1 & x=1\end{cases}$$



如此 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ F_n 是连续单增.有界函数 $|F_n(x)-F_{n+1}(x)|\le\frac{1}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow F_n(x)$ 一致收敛 $\Rightarrow F(x)$

$\Rightarrow F(x)$ 连续单增. 称为 Cantor-Lebesgue 函数, $F(x)\in BV[0,1]$

$F(x)$ 在 Cantor 集的补集上的每个构成区间上为常数.

不同构成区间的常数可以不同

由于 $m(C)=0$ $\Rightarrow$ $F'(x)=0$ a.e.

$\Rightarrow \int_0^1 F'(x)dx=0<F(1)-F(0)$

绝对连续函数

定义 若 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上实值函数. $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$. 使得对任意 $[a,b]$ 上互不相交的开区间 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{N}$, 当 $\sum_{i=1}^{N}(a_i,b_i)<\delta$ 时. $\sum_{i=1}^{N}|f(a_i)-f(b_i)|<\varepsilon$

则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上绝对连续函数. 记为 $f\in AC[a,b]$

性质 ① 绝对连续函数是一致连续的

② 有限区间上绝对连续函数是有界变差函数

证: 设 $f\in AC[a,b]$ 取 $\varepsilon=1$. 则 $\exists\delta>0$. 使当 $\sum(b_i-a_i)<\delta$ 时

$\sum|f(b_i)-f(a_i)|<1$

取 $[a,b]$ 中的分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 使 $\{x_i\}$ 为 k 等分点.

取 k 使 $\frac{b-a}{k}<\delta$ 对 $[x_{i-1},x_i]$ 取任意划分 $x_{i-1}=t_0<t_1<\cdots<t_n=x_i$

则 $\sum_j|f(t_j)-f(t_{j-1})|<1$ 故 $T_f(x_{i-1},x_i)\le 1$

$\Rightarrow T_f(a,b)=\sum T_f(x_{i-1},x_i)\le k$.

故 f 为有界变差函数.

③ 若 $f\in AC[a,b]$. 则 $T_f(a,x)$ 绝对连续

证 $f\in AC[a,b]$. $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta$. $\sum(b_i-a_i)<\delta\Rightarrow\sum|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$

取 a_i b_i 中任何一个划分 $a_i=x_0^i<x_1^i<\cdots<x_n^i=b_i$ $\sum_i\sum_j(x_j^i-x_{j-1}^i)<\delta$

$\sum_i\sum_j|f(x_j^i)-f(x_{j-1}^i)|<\varepsilon$ $\Rightarrow\sum_i T_f(a_i,b_i)<\varepsilon$ $\Rightarrow T_f(a,x)$ 绝对连续.

No.

Date.　/　/

④ 若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt \in AC[a,b]$

证. 由于 f 在 $[a,b]$ 上可积，故 $\forall \varepsilon\ \exists \delta>0\ \forall$ 可测 $A\in[a,b]$

$m(A)<\delta \Rightarrow \int_A |f(t)|dt<\varepsilon$

故 $\forall \{(a_i,b_i)\}\subset[a,b]\quad \sum(b_i-a_i)<\delta \Rightarrow \sum_i \int_{(a_i,b_i)}|f(t)|dt<\varepsilon$

$\Rightarrow \sum|F(b_i)-F(a_i)|<\varepsilon.$

说明 ① 一致连续不一定绝对连续

$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x} & x\in(0,1] \\ 0 & x=0\end{cases}$　在 $[0,1]$ 上一致连续（闭区间上连续）

但不是有界变差 ⇒ 不是绝对连续

② 无限区间上绝对连续不一定有界变差

$f(x)=\sin x$. 在 $[\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上

$|f'(x)|\le 1$　Lipschitz　故 $f\in AC[\frac{\pi}{2},+\infty)$

取分点 $\frac{\pi}{2}<\frac{3}{2}\pi<\frac{5}{2}\pi<\cdots<\frac{2n+1}{2}\pi$ 是 $[\frac{\pi}{2},\frac{2n+1}{2}\pi]$ 上分割

$\sum_k |\sin\frac{2k-1}{2}\pi-\sin\frac{2k+1}{2}\pi|=2n\to\infty\quad n\to\infty$

⇒ 不是有界变差函数

③ 连续有界变差函数不一定绝对连续

$F(x)$ 为 Cantor-Lebesgue 函数，$F\in BV[0,1]$，F 连续

方法1. 若 $F\in AC[0,1]$ 则由后面结论知 $\int_0^1 F'(x)dx=F(0)-F(1)$ 矛盾

方法2. $C=\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$　C_k 是 2^k 个区间 $\{[c_i,d_i]\}_{i=1}^{2^k}$ 的并. C_k 总长 $\frac{2^k}{3^k}$

存在有限个开区间的并 U. $C_k\subset U$ 且 $m(U)\le m(C_k)+\varepsilon$.

$\forall\delta>0$. 取 k 充分大 ε 充分小 $m(U)=(\frac{2}{3})^k+\varepsilon<\delta$.

设 $U=\bigcup_{j=1}^{N}(a_j,b_j)$ 不交 $a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_n<b_n$

由于 Cantor 集 $C\subset U$ 故 $U^c\subset C^c \Rightarrow F(b_n)=F(a_{n+1})$

$\sum_{j=1}^{N}(F(b_j)-F(a_j))=F(b_N)-F(a_N)+F(b_{N-1})-F(a_{N-1})+\cdots+F(b_1)-F(a_1)$

$=F(b_N)-F(a_1)=1$

故 $F(x)$ 不是绝对连续函数

REMEMBER · MEMORY

No.
Date. / /

定理 设 $F\in AC[a,b]$，则 $F'(x)$ 几乎处处存在，若 $F'(x)=0$ a.e. 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 为常数

定义 (Vitali 覆盖) 设 $E\subset R$，一族开区间 $\mathcal{F}$ 称为 E 的 Vitali 覆盖，若对 $\forall x\in E$ $\forall \eta>0$，$\exists I\in\mathcal{F}$ $|I|<\eta$，$x\in I$。即 E 中任意点都可以找到 $\mathcal{F}$ 中任意小覆盖

引理 设 $E\subset R$，$m(E)<+\infty$，$\mathcal{F}$ 是 E 的 Vitali 覆盖 $\forall\delta>0$，$\exists\mathcal{F}$ 中有限个互不相交的开区间 $I_1, I_2 \dots I_N$，使 $\sum_{k=1}^{N}|I_k|\geq m(E)-\delta$。

证. ① 取紧 $F\subset E$ F 有有限开覆盖 $m(F)>\delta$

$\exists$ 互不相交的开区间 $I_1, I_2 \dots I_{N_1}$ 使 $\sum_{i=1}^{N_1}|I_i|\geq\frac{1}{3}m(F)\geq\frac{\delta}{3}$ (之前有)

若此时已经有 $\sum_{i=1}^{N_1}|I_i|\geq m(E)-\delta$ 可以停下

否则 令 $E_2=E\setminus\bigcup_{i=1}^{N_1}I_i$ 由于 $\sum_{i=1}^{N_1}|I_i|\leq m(E)-\delta$

则有 $m(E_2)\geq\delta$

② 重复以上过程，取紧 $F_2\subset E_2$ $m(F_2)>\delta$

令 $\mathcal{F}_2=\{I\in\mathcal{F} \mid I\cap(\bigcup_{i=1}^{N}I_i)\neq\phi\}$，则 $\mathcal{F}_2$ 是 E_2 的 Vitali 覆盖

$\forall x\in E_2$，$d(x,\bigcup_{i=1}^{N_1}I_i)>0$ 从而存在 $I\in\mathcal{F}$ 使 $x\in I$，且 $I\cap(\bigcup_{i=1}^{N_1}I_i)=\phi$。

故存在 $\mathcal{F}_2$ 中有限开区间 $\{I_i\}_{i=N_1+1}^{N_2}$ 不交，构成 F_2 的开覆盖

$\sum_{i=N_1+1}^{N_2}|I_i|\geq\frac{1}{3}m(F_2)\geq\frac{1}{3}\delta$

注意 $\{I_i\}_{i=1}^{N_2}$ 不交，且 $\sum_{i=1}^{N_2}|I_i|\geq\frac{2}{3}\delta$.

若此时能满足条件，则停止，否则继续上述操作

一定 $\exists k$ $\sum_{i=1}^{N_k}|I_i|\geq\frac{k}{3}\delta\geq m(E)-\delta$

推论. 在上述引理条件下，可适当选取不交开区间 $\{I_i\}_{i=1}^{N}$ 使

$m(E\setminus\bigcup_{i=1}^{N}I_i)<2\delta$

证 设 U 是开集，$U\supset E$，$m(U\setminus E)<\delta$，可要求所选的区间包含在 U 中。

故 $(E\setminus\bigcup_{i=1}^{N}I_i)\cup(\bigcup_{i=1}^{N}I_i)\subset U$

故 $m(E\setminus\bigcup_{i=1}^{N}I_i)\leq m(U)-m(\bigcup_{i=1}^{N}I_i)\leq m(E)+\delta-(m(E)-\delta)=2\delta$

No.
Date. / /

定理. 若 F 是 $[a,b]$ 上绝对连续函数. 则 F' a.e 存在. 若 $F'(x)=0$ a.e. 则 F 为常值

证. F 绝对连续 $\Rightarrow F$ 是连续有界变差函数

$\Rightarrow F'$ a.e 存在

令 $E=\{x\in(a,b) \mid F'(x)=0\}$ $m(E)=b-a$

构造 E 的 Vitali 覆盖

$\forall \varepsilon>0$ $\forall x\in E$. $\lim\limits_{h\to 0}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right|=0$

$\forall \eta>0$, $\exists\ I=(a_x,b_x)$ $x\in I$ 使 $b_x-a_x<\eta$

且 $|F(b_x)-F(a_x)|\le \varepsilon(b_x-a_x)$

则 $\mathcal{F}=\{(a_x,b_x) \mid \forall x\in E\}$ 是 E 的一个 Vitali 覆盖

由引理知. $\forall \delta>0$ $\exists$ 有限个互不相交的开区间 $\{I_i\}_{i=1}^{N}$ $I=(a_i,b_i)$

$\sum\limits_{i=1}^{N}|I_i|\ge m(E)-\delta$

故 $\bigcup\limits_{i=1}^{N} I_i\subset[a,b]$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{N}|F(b_i)-F(a_i)|\le\varepsilon\sum\limits_{i=1}^{N}(b-a)<\varepsilon(b-a)$

设 $[a,b]\setminus(\bigcup\limits_{i=1}^{N}I_i)=\bigcup\limits_{k=1}^{m}[\alpha_k,\beta_k]$

$[\alpha_k,\beta_k]$ 不交. 且 $\sum\limits_{k=1}^{m}(\beta_k-\alpha_k)\le\delta$.

由 F 的绝对连续性知 $\sum\limits_{k=1}^{m}|F(\beta_k)-F(\alpha_k)|\le\varepsilon$

故 $|F(b)-F(a)|\le\sum\limits_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|+\sum\limits_{k=1}^{m}|F(\beta_k)-F(\alpha_k)|\le\varepsilon(b-a)+\varepsilon$

由 ε 任意性知 $F(b)=F(a)$

定理 ① 若 $F\in AC[a,b]$. 则 $F'(x)$ $\exists$ 且可积. $\forall x\in[a,b]$ $F(x)-F(a)=\int_a^x F'(y)\,dy$

② 若 f 是 $[a,b]$ 上可积. 则 $\exists$ AC 函数 $F(x)=\int_a^x f(y)\,dy$ 使 $F'(x)=f(x)$

推论. 若 f 是 $[a,b]$ 可测. 则下面等价

① $\exists$ 可积 $g(x)$ $f(x)-f(a)=\int_a^x g(t)\,dt$ $\forall x\in[a,b]$ 此时 $f'(x)=g(x)$

② $f\in AC[a,b]$

证 ① 由于 F 是两个个连续函数之差. 故 $F'(x)$ $\exists$ a.e. 且可积.

令 $G(x)=\int_a^x F'(y)\,dy$ 由 F' 可积 $\Rightarrow G(x)\in AC[a,b]$

故 $G(x)-F(x)\in AC[a,b]$ $G'(x)-F'(x)=0$ a.e. (Lebesgue 微分定理)

No.

Date.　/　/

回忆. 设 f 是 $[a,b]$ 可积. $F(x)=\int_a^x f(y)\,dy$. 则对 f 的 Lebesgue 点.

有 $F'(x)=f(x)$

故 $F-G$ 为常数 $=F(a)-G(a)=F(a)$

$\Rightarrow F(x)=F(a)+\int_a^x F'(y)\,dy$

推论. 若 $f\cdot g\in AC[a,b]$ 则

$$\int_a^b f\cdot g'=fg\Big|_a^b-\int_a^b g\cdot f'$$

证. $fg\in AC[a,b]$

$$f(b)g(b)-f(a)\cdot g(a)=\int_a^b (f\cdot g)'=\int_a^b f\cdot g'+\int_a^b g\cdot f'$$

性质. 连续有界变差函数是两连续↑函数的差

证 $F=F_1-F_2$　　$F_1=P_F(a,x)+F(a)$

$F_2=N_F(a,x)$

回忆 $P_F+N_F=T_F$

$P_F-N_F=F(b)-F(a)$

跳跃函数

设 $F(x)$ 是 (不一定连续) 单增函数. 在 x 点定义 $F(x^+)=\lim\limits_{y\to x^+}F(y)$. $F(x^-)=\lim\limits_{y\to x^-}F(y)$

则 $F(x^-)\le F(x)\le F(x^+)$　　若 $F(x^-)\ne F(x^+)$ 则 F 在 x 不连续.

引理. 定义在闭区间 $[a,b]$ 上有界单增函数最多可数个不连续点.

证. 若 F 在 x 点不连续 则 $F(x^-)<F(x^+)$ 取有理数 $r_x\in(F(x^-),F(x^+))$

则若 F 有两个不连续点 x,y. 则 $r_x<r_y$. 故不同的不连续点对应不同有理数

故 F 的不连续点至多可数

令 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 为 F 的所有不连续点. 定义 $\alpha_n=F(x_n^+)-F(x_n^-)$ 称为 F 在 x_n 点的跳跃. $F(x_n^+)=F(x_n^-)+\alpha_n$ 且存在 $\theta_n\in[0,1]$ 使 $F(x_n)=F(x_n^-)+\theta_n\alpha_n$

No.
Date. / /

令 $j_n(x)=\begin{cases}0 & x<x_n\\ \theta_n & x=x_n\\ 1 & x>x_n\end{cases}$ 定义 $J_F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n j_n(x)$

引理. 设F在[0,1]单增有界. $\{x_n\}$是F的不连续集合

① $J_F(x)$只在$\{x_n\}$处不连续. 且在x_n点 J_F与F跳跃相同

② $F(x)-J_F(x)$ 单增连续函数

证. ① 若$x\neq x_n$. 则 $j_n(x)$在x点连续且 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛 故 $J_F(x)$ 一致收敛

$\Rightarrow J_F(x)$在x连续 $\Rightarrow F(x)-J_F(x)$ 在x点连续

若 $x=x_N$. 则 $J_F(x)=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n j_n(x)+\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_n j_n(x)$

在x_N不连 跳跃α_N　在x_N连

② $J(y)-J(x)=(F(y)-F(y^-))+(F(x^+)-F(x))+\sum_{x<x_k<y}\alpha_k$　$y>x$

$=F(y)-F(x)+(F(y^-)-F(x^+)-\sum_{x<x_k<y}\alpha_k)$

$\leq F(y)-F(x)$

故 $F(x)-J(x)\leq F(y)-J(y)$　故 $F(x)-J(x)$ 单增连续函数

定理. 设$J(x)$为跳跃函数. 则$J'(x)$几乎处处存在为0

证 令 $E=\{x\in(a,b)\mid \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{J(x+h)-J(x)}{h}>\varepsilon\}$

引理 E可测.

令 $\delta=m(E)$. 下证 $\delta=0$

由于 $J(x)$收敛. 故 $\sum\alpha_n$ 收敛 $\forall\eta>0\ \exists N$. $\sum_{n\geq N}\alpha_n<\eta$

令 $J_0(x)=\sum_{n>N}\alpha_n j_n(x)$. 则 $J_0(b)-J_0(a)<\eta$

由于 $J-J_0$ 是有限个 $\alpha_n j_n(x)$ 的和

故在E的定义中当J_0代替J时所得的集合与E只相差有限个点

设 $m(E)=\delta>0$. ∃闭集 $K\subset E$. $m(E-K)<\frac{\delta}{2}$

故 $m(K)>\frac{\delta}{2}$. 由K的取法 $\forall x\in K$

$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{J_0(x+h)-J_0(x)}{h}>\varepsilon$

存在区间 $(a_x,b_x)\subset(a,b)$ 使得

$J_0(b_x)-J_0(a_x)>\varepsilon(b_x-a_x)$

No.
Date. / /

由于 K 紧，故存在有限子覆盖，故存在有限区间 $I_1 \cdots I_n$ 不交

$\sum_{j=1}^{n} |I_j| > \frac{1}{3} m(K)$，即 $\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \geq \frac{1}{3} m(K) > \frac{\delta}{6}$

$J_0(b) - J_0(a) \geq \sum_{j=1}^{n} (J(b_j) - J(a_j)) > \frac{\delta}{6} \varepsilon$

即 $\frac{\varepsilon\delta}{6} < \eta$，$\eta \to 0$ 时 $\delta = 0$，与 $\delta > 0$ 矛盾

引理 $\forall \varepsilon > 0$，$E = \{x \in (a,b) \mid \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{J(x+h) - J(x)}{h} > \varepsilon\}$ 可测

证 ① $\Delta(x,h) = \frac{J(x+h) - J(x)}{h}$

$\overline{\lim_{h\to 0}} \Delta(x,h) > \varepsilon \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$，$\exists h \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \setminus \{0\}$，$\Delta(x,h) > \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}$ $\exists k \geq m$，$\exists h \in [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] \setminus (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ $\Delta(x,h) > \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}$ $\exists k \geq m$，$\sup_{\frac{1}{k} \leq |h| \leq \frac{1}{m}} \Delta(x,h) > \varepsilon$

故 $\{\overline{\lim_{h\to 0}} \Delta(x,h) > \varepsilon\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k \geq m} \{\sup_{\frac{1}{k} \leq |h| \leq \frac{1}{m}} \Delta(x,h) > \varepsilon\}$

只要证明右边可测 $A = A_{k,m,\varepsilon} = \{\sup_{\frac{1}{k} \leq |h| \leq \frac{1}{m}} \Delta(x,h) > \varepsilon\}$

② 下证 $A = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \{\sup_{\frac{1}{k} \leq |h| \leq \frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \varepsilon + \frac{1}{l}\}$

定义 $I = I_{k,m} = [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] \setminus (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$

$\Rightarrow$ 当 $x \in A$ 时 $\sup_{\frac{1}{k} \leq |h| \leq \frac{1}{m}} \Delta(x,h) > \varepsilon$，故 $\exists h \in I$，$\Delta(x,h) > \varepsilon$

$\exists l \in \mathbb{N}$，$\Delta(x,h) > \varepsilon + \frac{2}{l}$，由于 $\Delta(x,h) = \lim_{n\to\infty} \Delta_n(x,h)$

故当 l 大时 $\Delta_n(x,h) > \varepsilon + \frac{1}{l}$

$\Leftarrow$ 当 $x \in$ 右时，$\exists l \in \mathbb{N}$，$\forall n \geq N$ 时 $\sup_{\frac{1}{k} \leq |h| \leq \frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \varepsilon + \frac{1}{l}$

由 sup 定义 $\exists h_n \in I$，$\Delta_n(x,h) > \varepsilon + \frac{1}{l}$

由于 I 紧 $\exists h_n$ 子列 使 $h_n \to h \in I$，当 $n = n(k) \geq N$ 充分大时

$|J_n(x) - J(x)| \leq \frac{1}{2kl}$ 故 $\frac{|J_n(x) - J(x)|}{|h|} \leq \frac{1}{2kl} \cdot \frac{1}{|h|} \leq \frac{1}{2l}$ $\forall h \in I$

$\frac{J_n(x+h_n) - J(x)}{h_n} = \frac{J_n(x+h_n) - J_n(x)}{h_n} + \frac{J_n(x) - J(x)}{h_n} > \varepsilon + \frac{1}{l} - \frac{1}{2l} = \varepsilon + \frac{1}{2l} > \varepsilon$

故 $\varepsilon < \frac{J_n(x+h_n) - J(x)}{h_n} \leq \frac{J(x+h_n) - J(x)}{h_n} = \Delta(x, h_n)$ $(J_n \leq J)$

故 $\sup_{\frac{1}{k} \leq |h| \leq \frac{1}{m}} \Delta(x,h) \geq \Delta(x, h_n) > \varepsilon$，即 $x \in A$

No.

Date.　　/　　/

③ 只要证 $B=\{\sup_{\frac{1}{k}\le|h|\le\frac{1}{m}}\Delta_n(x,h)>\varepsilon\}$ 可测

引理. 若 $f:(a,b)\to R$ $f=\frac{f_1}{f_2}$ 其中 f_1增 $f_2>0$. f_2连续

则 $f(x)\le\overline{\lim_{q\in\mathbb{Q},q\to x^+}}f(q)$. 由此引理可得

$\sup_{\frac{1}{k}\le|h|\le\frac{1}{m}}\Delta_n(x,h)=\sup_{h\in[\ldots]}\Delta_n(x,h)$ (*)

(*) 证明 "≥" 显然

"≤" $h\in(\frac{1}{k},\frac{1}{m})$. 由引理知

$\Delta_n(x,h)\le\overline{\lim_{q\in\mathbb{Q}\ q\to h^+}}\Delta_n(x,q)\le\sup_{q\in I\cap\mathbb{Q}}\Delta_n(x,q)\le$右

$h\in(-\frac{1}{m},\frac{1}{k})$.

$\Delta_n(x,h)\xlongequal[h'\in(\frac{1}{k},\frac{1}{m})]{h'=-h>0}\frac{J_n(x)-J_n(x-h')}{h'}\le\overline{\lim_{q\in[\frac{1}{k},\frac{1}{m}]\cap\mathbb{Q},q\to h'^+}}\frac{J_n(x)-J_n(x-q')}{q'}\le\overline{\lim_{q\in I\cap\mathbb{Q}}}\Delta_n(x,q)\le$右.

④ 引理证明

$\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$ $\exists q\in\mathbb{Q}$ 满足 $x<q<x+\delta$.. $f(q)<f(x)-\varepsilon$

当 $x<q<x+\delta$ 时

$f(q)-f(x)=\frac{f_1(q)}{f_2(q)}-\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{f_1(q)-f_1(x)}{f_2(q)}+f_1(x)\left(\frac{1}{f_2(q)}-\frac{1}{f_2(x)}\right)\ge\varepsilon$ $\nearrow 0$

回忆. 设 $E\subset R^1$ $\mathcal{F}=\{I_x\}$ - 族区间 (开.闭.半开半闭)

$\forall\varepsilon>0$. $\exists x\in E$. $\exists I_x\in\mathcal{F}$. $x\in I_x$ $|I_x|<\varepsilon$

称 $\mathcal{F}$为 E 的 Vitali 覆盖

Vitali 覆盖定理 设 $E\subset R^1$ $m_*(E)<\infty$. $\mathcal{F}$为E的一个 Vitali 覆盖, 则 $\forall\varepsilon>0$

∃有限个不交区间 $I_1, I_2\cdots I_N$ 使 $m_*(E-\sum_{i=1}^{N}I_i)<\varepsilon$

用此来证

定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增有界. 则 $f(x)$ 几乎处处可导 且 $f'(x)$ 可积 且

$\int_a^b f'(x)\,dx\le f(b)-f(a)$

证. ① 令 $E_1=\{x\in(a,b)\mid D^+f(x)>D_-f(x)\}$ 要证 $m_*(E_1)=0$

$=\bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}}\underbrace{\{x\in(a,b)\mid D^+f(x)>r>s>D_-f(x)\}}_{A}$

$\forall\varepsilon$. ∃开 G. $m_*(G)<m_*(A)+\varepsilon$

$\forall x\in A$. $D_-f<s$ 故 $D_-f(x)=\underline{\lim_{h\to0^-}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<s$

No.
Date. / /

故 $\exists h>0$ $[x-h,x]\subset G$ 且 $\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}<s$

故 $f(x)-f(x-h)<hs$

故 $\{[x-h,x]\mid x\in A\}$ 是 A 的 Vitali 覆盖

$\exists$ 有限不交区间 $I_i=[x_i-h_i,x_i]\subset G$ $m_*(A-\bigcup_{i=1}^{N}I_i)<\varepsilon$

且 $\sum_{i=1}^{N}h_i\le m(G)\le m_*(G)+\varepsilon$

令 $B=A\cap\bigcup_{i=1}I_i^\circ$ 则 $m_*(A)\le m_*(A\cap\bigcup_{i=1}^{n}I_i^\circ)+m_*(A-\bigcup_{i=1}^{n}I_i)$

$\le m_*(B)+\varepsilon$

$\sum_{i=1}(f(x_i)-f(x_i-h_i))\le s\sum_{i=1}^{N}h_i\le s(m_*(A)+\varepsilon)$

② $\forall y\in B=A\cap(\bigcup I_i^\circ)$ $D^+f(y)>r$

$\exists k>0$ $[y,y+k]$ 包含在某个 I_i° 中

且 $f(y+k)-f(y)>rk$

$\{[y,y+k]\mid y\in B\}$ 构成 B 的 Vitali 覆盖

$\exists$ 有限个不交区间 $J_l=[y_l,y_l+k_l]$ $(l=1,2,\dots,p)$ $m_*(B-\bigcup_{l=1}^{p}J_l)<\varepsilon$

$m_*(A)\le m_*(B)+\varepsilon\le m_*(B\cap\bigcup_{l=1}J_l)+m_*(B-\bigcup_{l=1}J_l)+\varepsilon$

$\le m_*(\bigcup_{l=1}J_l)+2\varepsilon=\sum_{l=1}^{p}k_l+2\varepsilon$

$\sum_{l=1}^{p}(f(y_l+k_l)-f(y_l))>r\sum_{l=1}^{p}k_l\ge r(m_*(A)-2\varepsilon)$

③ 由于 f 单增 且每个 J_l 包含在某个 I_i° 中

故 $\sum_{i=1}^{N}(f(x_i)-f(x_i-h_i))\ge\sum_{l=1}^{p}(f(y_l+k_l)-f(y_l))$

故 $s(m_*(A)+\varepsilon)\ge r(m_*(A)-2\varepsilon)$

$\varepsilon\to0$ $s\,m_*(A)\ge r\,m_*(A)$ $r>s$ 知 $m_*(A)=0$ 即 $D^+f\le D_-f$ a.e

④ 令 $E_2=\{x\in(a,b)\mid D^-f(x)>D_+f(x)\}$ 要证 $m_*(E_2)=0$

令 $g(x)=-f(x)$ 则 $D^+g=-D_+f$ $D_-g=-D^-f$

由 $D^+g\le D_-g$ a.e 知 $-D_+f\le-D^-f$ a.e

即 $D_+f\ge D^-f$ a.e 故 $m(E_2)=0$

令 $E=E_1\cup E_2$ 则 $m_*(E)=0$ 故在 $[a,b]-E$ 上

$D_+f\le D^+f\le D_-f\le D^-f\le D_+f$

故 $g(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 存在，且 $g(x)\in\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

Wengu 文谷

No.

Date.　　/　　/

⑤ 令 $g_n(x)=n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]$ $n\in N$. $x>b$ 时 定义 $f(x)=f(b)$

则 $g_n(x)\to g(x)$ 由 $f(x)\uparrow$ $g_n(x)\geq 0$ $g(x)$ 可测

$\int_a^b g_n(x)=n\int_a^b(f(x+\frac{1}{n})-f(x))dx=n[\int_b^{b+\frac{1}{n}}f(x)-\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)dx]$

$=f(b)-n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)dx\leq f(b)-f(a)$

由 Fatou 引理

$\int_a^b g(x)dx\leq\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx\leq f(b)-f(a)<+\infty$

故 $g(x)$ 可积，几乎处处连续 故 $f(x)$ 几乎处处可导

定理 设 $\{f_n(x)\}$ 是关于 x 单增的函数列，且 $\sum f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$ 有界

则 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$ a.e

证. 令 $r_n(x)=\sum_{i=n+1}^{\infty}f_i(x)$ 则 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)+r_n(x)$ $(\forall x\in[a,b])$

由于 $f(x)$ $f_i(x)$ $r_n(x)$ $\uparrow$ 故导数几乎处处存在

$f'(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i'(x)+r_n'(x)$ a.e

只要证 $\lim_{n\to\infty}r_n'(x)=0$ a.e

由于 $f_i'(x)\geq 0$ a.e. $\Rightarrow r_n'(x)$ 关于 $n\downarrow$ $\int_a^b r_n'(x)dx\leq r_n(b)-r_n(a)<\infty$

$\int_a^b\lim_{n\to\infty}r_n'(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b r_n'(x)dx\leq\lim_{n\to\infty}(r_n(b)-r_n(a))<+\infty$

故 $\lim_{n\to\infty}r_n'(x)=0$ a.e

问题. $\Gamma\subset R^2$ 曲线 $L(\Gamma)=\int_a^b(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{1}{2}}dt$ $x(t)$ $y(t)$ 几乎处处可导

上式是否成立.

例 若 $\gamma.$ $[0,1]\to\mathbb{R}^2$ $t\to(F(t),F(t))$ $F(t)$ 是 Cantor-Lebesgue 函数

$F(t)$ 连续 $\uparrow$ $[0,1]\to[0,1]$ 满射

但 $F'(t)=0$ a.e

定理. 设 $(x(t),y(t))$ $[0,1]\to\mathbb{R}^2$ 且 $x(t),y(t)\in AC[a,b]$ 则 Γ 是可求长的

且 $L=\int_a^b(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{1}{2}}dt$

证 ① 令 $F(t)=x(t)+iy(t)$ 则 $L(\gamma)=T_F(a,b)$

REMEMBER · MEMORY

因为 $T_F(a,b) = \sup_{\Delta} \sum_k |F(t_k) - F(t_{k-1})|$

$= \sup_{\Delta} \sum_k \left((x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

$= L(r)$

② 只要证 $T_F(a,b) = \int_a^b |F'(t)| dt$

右≤左. $\sum_k |F(t_k) - F(t_{k-1})| \overset{AC}{=} \sum_k \left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} F'(t) dt\right| \le \sum_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} |F'(t)| dt$

取 sup 左 ≤ 右 $= \int_a^b |F'(t)| dt =$ 右

右≤左. 由于 $F'(t)$ 可积 故存在阶梯函数 g. 使 $\int_a^b |F'(t) - g(t)| dt < \varepsilon$

令 $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ $H(x) = \int_a^x h(t) dt$ $h(t) = F'(t) - g(t)$

则 $F = G + H$. $G = F - H$.

$T_G(a,b) \le T_F(a,b) + T_{-H}(a,b) = T_F(a,b) + T_H(a,b)$

由①知 $T_H(a,b) \le \int_a^b |H'(t)| = \int_a^b |h(t)| < \varepsilon$

故 $T_G(a,b) \le T_F(a,b) + \varepsilon$

取 $[a,b]$ 划分 Δ $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$

g 在 $[t_{j-1}, t_j]$ 上是常值.

$T_G(a,b) \ge \sum_{j=1}^{N} |G(t_j) - G(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{N} \left|\int_{t_{j-1}}^{t_j} g(t) dt\right| = \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |g(t)| dt = \int_a^b |g(t)| dt$

$\ge \int_a^b |F'(t)| dt - \varepsilon$

故 $\int_a^b |F'(t)| dt \le T_F(a,b) + 2\varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0$ 知 右≤左

抽象测度.

设 X 为非空集合. 称满足某种条件的子集的集合为集类. 一般用花写字母 $\mathcal{A}$. $\mathcal{B}$. $\mathcal{F}$. 表示

定义 设 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个集类. 满足:

① $\phi \in \mathcal{A}$. ② 对并封闭 $E_1, E_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$

③ 对余运算封闭. $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$.

则称 $\mathcal{A}$ 为 X 上一个代数.

性质. 若 $\mathcal{A}$ 是 X 上的代数. 则 $\{\phi, X\} \subset \mathcal{A}$. 且 $\mathcal{A}$ 对交和差运算封闭

No.
Date. / /

定义 设 $\mathcal{A}$ 是 X 上集类. 若

① $\phi \in \mathcal{A}$ ② $E_k \in \mathcal{A}$ ($k=1,2\cdots$) $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$

③ $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$.

则 $\mathcal{A}$ 称为 X 上一个 σ-代数

性质. 若 $\mathcal{A}$ 是 X 上一个σ代数 则

① $\mathcal{A}$ 是 X 上代数

② $\mathcal{A}$ 对并. 交. 差. 可列交并封闭

例. X 上的所有子集组成的集合. 记为 $\mathcal{P}$

$\mathcal{P}$ 为 σ 代数. 是最大的 σ-代数

设 $\mathcal{A}=\{\phi, X\}$ $\mathcal{A}$ 是最小的 σ 代数

例. 设 X 是无限集 $\mathcal{A}=\{A\subset X \mid A$ 或 A^c 为有限集$\}$. 则 $\mathcal{A}$ 是 X 上代数

证① $\phi \in \mathcal{A}$. 对余封闭. 只要证对并封闭

$A,B\in\mathcal{A}$. 若 A,B 都有限 $A\cup B \in \mathcal{A}$

设 A 无限 故 A^c 有限 $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c \subset A^c$ 有限

$\Rightarrow A\cup B \in \mathcal{A}$.

② $\mathcal{A}$ 不是 σ-代数

$A=\{a_1,a_2\cdots\} \subset X$ 可列子集

令 $A_n=\{a_{2n}\}$ $(n\in N)$ $A_n\in\mathcal{A}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{a_2, a_4, a_6\cdots\} \notin \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ 不是 σ 代数

定义 设 $\mathcal{M}$ 是 X 上集类. $\mu: \mathcal{M} \to [0,+\infty)$ 满足

(a) $\mu(\phi)=0$

(b) 若 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 不交. 且 $E_k\in\mathcal{M}$ $(\forall k\in N)$ 则 $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)$

则 μ 称为 $(X,\mathcal{M})$ 上的测度. $(X,\mathcal{M},\mu)$ 称为测度空间

No.
Date. / /

若 $\mu(X)<\infty$，则称 μ 是有限测度

(X, M, μ) 称为 σ-有限的，若 X 可写为可数个有限测度的可测集的并。

例 $X=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，M 为 X 中所有子集

$\mu(\{x_n\})=\mu_n \quad \mu_n>0 \quad \mu(E)=\sum_{x_n\in E}\mu_n$

若 $\mu_n=1\ (\forall n)$ 则 $\mu(E)=\begin{cases}\#E & 若\ \#E<\infty \\ \infty & 否则\end{cases}$ 计数测度。

例 设 $a\in X$，M 是 X 中所有子集，$\mu(A)=\begin{cases}1 & 若\ a\in A \\ 0 & 若\ a\notin A\end{cases}$

则 μ 是 M 上测度 Dirac 测度

例. $X\in\mathbb{R}^d$，M 是 X 上所有 Lebesgue 可测集，f 为可测函数

$\mu(E)=\int_E f\,dx$. $\quad f\equiv 1$ Lebesgue 测度

定义 设 X 非空，$\mathcal{P}$ 为 X 上所有子集集合，若 μ_* 满足 $\mathcal{P}\to[0,+\infty]$

(1) $\mu_*(\emptyset)=0$

(2) 单调性 $E_1\subset E_2 \quad \mu_*(E_1)\le\mu_*(E_2)$

(3) 可数次可加性 $\mu_*(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}\mu_*(E_k)$

则 μ_* 为 X 上一个外测度

定义① 设 μ_* 是 X 的一个外测度，若 $E\subset X$，且满足

$\mu_*(A)=\mu_*(A\cap E)+\mu_*(A\cap E^c) \quad (\forall A\subset X)$ (Caratheodory 条件)

则称 E 是 μ_* 可测集

故 E 是 μ_* 可测 $\Rightarrow$ E^c 是 μ_* 可测

$\emptyset$ 是 μ_* 可测

② 给定测度空间 (X, M, μ) 若 $E\subset M$ $\mu(E)=0$，则称 E 是 μ-零测集

若 μ 零测集的子集都可测，则称 (X, M, μ) 完备

No.
Date. / /

例 设 $X=\{0,1\}$. $\mathcal{F}=\{\phi, X\}$. $\mu(\phi)=\mu(X)=0$

μ是 X上测度. 但不完备

定理. 给定 X上的外测度 μ_*. 则

① 所有 X上的 μ_*可测集的集类 $\mathcal{M}$ 是 X上的 σ代数

② $\mu_*|_{\mathcal{M}}$ 是一个完备测度.

证. ① 只要证 $\mathcal{M}$ 对可数并封闭

1). $E_1\in\mathcal{M}$. $E_2\in\mathcal{M} \Rightarrow E_1\cup E_2\in\mathcal{M}$

$\forall A\subset X$. $\mu_*(A)=\mu_*(A\cap E_2)+\mu_*(A\cap E_2^c)$

$=\mu_*(A\cap E_2\cap E_1)+\mu_*(A\cap E_2\cap E_1^c)$

$+\mu_*(A\cap E_2^c\cap E_1)+\mu_*(A\cap E_2^c\cap E_1^c)$ ①

由 $E_1\cup E_2=(E_1\cap E_2)\cup(E_1\cap E_2^c)\cup(E_2\cap E_1^c)$

① $\geqslant \mu_*(A\cap(E_1\cup E_2))+\mu_*(A\cap(E_1\cup E_2)^c)$

故 $E_1\cup E_2\in\mathcal{M}$

2). $\mu_*|_{\mathcal{M}}$ 有限可加性

E_1 $E_2\in\mathcal{M}$. $E_1\cap E_2=\phi$

$\mu_*(E_1\cup E_2)=\mu_*((E_1\cup E_2)\cap E_1)+\mu_*((E_1\cup E_2)\cap E_1^c)$

$=\mu_*(E_1)+\mu_*(E_2)$

3). $\mathcal{M}$是 σ-代数. 设 $E_k\in\mathcal{M}$ ($\forall k\in\mathbb{N}$)不交

定义 $G_n=\bigcup_{j=1}^{n}E_j$ $G=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$ 由 2) 知 $G_n\in\mathcal{M}$

$\forall A\subset X$. $\mu_*(A\cap G_n)=\mu_*(A\cap G_n\cap E_n)+\mu_*(A\cap G_n\cap E_n^c)$

$=\mu_*(A\cap E_n)+\mu_*(A\cap G_{n-1})$

$=\cdots=\sum_{j=1}^{n}\mu_*(A\cap E_j)$

由 $G_n\in\mathcal{M}$ 故

$\mu_*(A)=\mu_*(G_n\cap A)+\mu_*(A\cap G_n^c)$

$=\sum_{j=1}^{n}\mu_*(A\cap E_j)+\mu_*(A\cap G_n^c)$

$\geqslant\sum_{j=1}^{n}\mu_*(A\cap E_j)+\mu_*(A\cap G^c)$

No.
Date. / /

令 $n\to\infty$ $\mu_x(A)\geq\sum_{j=1}^{\infty}\mu_x(A\cap E_j)+\mu_x(A\cap G^c)$

$\geq\mu_x(A\cap G)+\mu_x(A\cap G^c)$

故 $G\in\mathcal{M}$.

② $\mu_x|_{\mathcal{M}}$ 上是测度. 即证可数可加

设 $E_k\in\mathcal{M}$ $(k\in\mathbb{N})$ 不交. 令 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\in\mathcal{M}$.

由 $\mu_x(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_x(A\cap E_n)+\mu_x(A\cap E^c)$

取 $A=E$. 得 $\mu_x(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_x(E_n)$

③ $(X,\mathcal{M},\mu_x)$ 完备.

设 $F\in\mathcal{M}$. $\mu_x(F)=0$. $E\subset F$. 要证 $E\in\mathcal{M}$.

$\forall A\subset X$. 由 μ_x 外测度

$\mu_x(A)\leq\mu_x(A\cap E)+\mu_x(A\cap E^c)\leq\mu_x(F)+\mu_x(A)=\mu_x(A)$

$\Rightarrow\mu_x(A)=\mu_x(A\cap E)+\mu_x(A\cap E^c)\Rightarrow E\in\mathcal{M}$.

定理. 设 μ 是 $(X,\mathcal{M})$ 上测度

① 单调性 $E_1,E_2\in\mathcal{M}$. $E_1\subset E_2$ $\mu(E_1)\leq\mu(E_2)$

② 次可加性 $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)$

③ 连续性 $E_k\in\mathcal{M}$. $E_k\uparrow E$. $\mu(E)=\lim_{k\to\infty}\mu(E_k)$

$E_k\in\mathcal{M}$. $E_k\downarrow E$. $\mu(E_1)<+\infty$ 则 $\mu(E)=\lim_{k\to\infty}\mu(E_k)$

证 ② 取 $E_1'=E_1$

$E_2'=E_2\setminus E_1$

$\vdots$

$E_k'=E_k\setminus\bigcup_{j=1}^{k-1}E_j$

$\mu(\bigcup_k E_k)=\mu(\bigcup E_k')=\sum\mu(E_k')\leq\sum\mu(E_k)$

测度延拓

定义. 设 X 集合. $\mathcal{A}$ 是 X 上代数. $\mu_x: \mathcal{A}\to[0,+\infty]$ 满足

① $\mu_x(\phi)=0$

② 设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 不交. 且 $E_k\in\mathcal{A}$. 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\in\mathcal{A}$. 则有 $\mu_x(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_x(E_k)$

No.

Date.　　/　　/

则称 μ_0 为 X 上预测度

引理. 设 $\mathcal{A}$ 是 X 上代数, μ_0 预测度. $E\subset X$.

定义 $\mu_*(E)=\inf\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(E_j)\quad E_j\in\mathcal{A}\ (\forall j),\ E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\}$

则 ① μ_* 是 X 上外测度

② $\mu_*|_{\mathcal{A}}=\mu_0$

③ $\mathcal{A}$ 中所有集合都是 μ_* 可测的 即 $\forall E\in\mathcal{A}$ 有

$$\mu_*(A)=\mu_*(A\cap E)+\mu_*(A\cap E^c)$$

证 ① 只要证可数次可加性.

设 $\{E_j\}$ 是 X 中一列集. 且设 $\mu_*(E_j)<\infty$.

由 μ_* 定义. $\forall E_k$. $\exists A_j^{(k)}\in\mathcal{A}$ $\quad E_k\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j^{(k)}$

且 $\sum_{j=1}^{\infty}\mu_*(A_j^{(k)})<\mu_*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}$

$\mu_*(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j)\le\sum_{k,j}\mu_*(A_j^{(k)})\le\sum_k(\mu_*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k})=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_*(E_k)+\varepsilon$

令 $\varepsilon\to0$ $\quad\mu_*(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j)\le\sum_{k=1}^{\infty}\mu_*(E_k)$

故 μ_* 是外测度.

② 下证 $\mu_*(E)=\mu_0(E)\quad\forall E\in\mathcal{A}$

由 μ_* 定义 $\quad\mu_*(E)\le\mu_0(E)$ 只要证 $\mu_0(E)\le\mu_*(E)$

设 $E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\quad A_k\in\mathcal{A}\ (\forall k)$

令 $E_1=E\cap A_1\quad E_2=E\cap(A_2\setminus A_1)\ \cdots\ E_k=E\cap(A_k\setminus\bigcup_{j=1}^{k-1}A_j)$

则 $\{E_k\}$ 不交 $E_k\in\mathcal{A}$. 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=E\in\mathcal{A}$

故 $\mu_0(E)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(E_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(A_k)$ 对右取 inf. $\mu_0(E)\le\mu_*(E)$

③ 即证 $\forall A\in\mathcal{A}\quad\mu_*(E)=\mu_*(E\cap A)+\mu_*(E\cap A^c)\quad\forall E\subset X$

由 $\mu_*(E)$ 定义 $\exists A_k\in\mathcal{A}$. $E\subset\bigcup_k A_k$ $\quad\sum_k\mu_*(A_k)\le\mu_*(E)+\varepsilon$

$\mu_*(E)\le\mu_*(A\cap E)+\mu_*(A^c\cap E)$

$\le\mu_*(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A\cap A_k))+\mu_*(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A^c\cap A_k))$

$\le\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_*(A_k\cap A)+\mu_*(A_k\cap A^c))$

$=\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_0(A_k\cap A)+\mu_0(A_k\cap A^c))$ (由②)

$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k) \le \mu_*(E) + \varepsilon$ 　令 $\varepsilon \to 0$ 知

$\mu_*(E) = \mu_*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ 　$\forall E \subset X$

定理 给定X. $\mathcal{A}$ 为X上代数. μ_0 为 $\mathcal{A}$ 上预测度. 设 m 为 $\mathcal{A}$ 生成的 σ 代数 则

① 存在 m 上测度 μ. 使 $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$

② 若 $(X.\mathcal{A}.\mu_0)$ 是 σ-有限的 (即 $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 　$A_k \in \mathcal{A}$. $\mu_*(A_k) < \infty$)

则①中测度是唯一的 (即若 ν 是 m 上另一测度. 且 $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$. 则 $\nu = \mu$)

证. ① $(X.\mathcal{A}.\mu_0) \longrightarrow (X.\bar{\mathcal{A}}.\mu_*) \longrightarrow (X.m.\mu)$

预测度 　　所有集 外测度 　　测度

② 唯一性. 设 ν 是 m 上另一测度. 且 $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$

首先证 $\nu(E) \le \mu(E)$ 　$\forall E \in m$

设 $E \subset m$ 　$\exists A_k \in \mathcal{A}$. $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

$\nu(E) \le \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k)$

右边取 inf 　$\nu(E) \le \mu(E)$

下证 $\mu(E) \le \nu(E)$. 　$(\forall E \in m)$ 设 $\mu(E) < \infty$.

由于 $E \in m$ 　$\forall \varepsilon > 0$. $\exists A_k \in \mathcal{A}$. $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_k$. 且 $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k) \le \mu(E) + \varepsilon$

令 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 　$\mu(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu_*(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k) < \mu(E) + \varepsilon$

$\mu(A \setminus E) = \mu(A) - \mu(E) < \varepsilon$

$\nu(A) = \lim_{N \to \infty} \nu(\bigcup_{k=1}^{N} A_k) = \lim_{N \to \infty} \mu_0(\bigcup_{k=1}^{N} A_k) = \lim_{N \to \infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{N} A_k) = \mu(A)$

$\mu(E) \le \mu(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E)$

$\le \nu(E) + \mu(A \setminus E)$ 　(先证的)

$\le \nu(E) + \varepsilon$

故 $\mu(E) \le \nu(E)$

设 $E \in m$ 为任意集合 (即可以为 ∞)

由于 μ_0 是 σ 有限的 $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 　$A_k \in \mathcal{A}$. 不交 / $\mu_0(A_k) < \infty$.

$\nu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E \cap A_k) = \mu(E)$

总结 $(X, \mathcal{A}, \mu_0)$ $\mathcal{A}$代数 μ_0预测度

① μ_0定义μ^*外测度 则$\mathcal{A}$中集都是μ^*可测的

② $\mathcal{A}$生成σ代数$\mathcal{M}$. 则 $\mu^*|_{\mathcal{M}}$是一个测度. 记为μ. 若μ_0 σ有限. 则μ唯一

例 设 $X=\mathbb{R}^1$. $\mathcal{A}=\{A \mid A=\emptyset$或有限个形如$(a,b]$的并$\}$ 代数

若 $A\in\mathcal{A}$. $A=\emptyset$. $A=\bigcup_{i=1}^{k}(a_i, b_i]$. $(a_i, b_i]$互不相交. $\mu_0(A)=\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)$

且 $\mu_0(\emptyset)=0$ μ_0是$\mathcal{A}$上的预测度

μ_0可定义外测度μ^*. 则$\mathcal{A}$中所有集合μ^*可测

$\mathcal{M}$是$\mathcal{A}$生成的σ代数. 则$\mu^*|_{\mathcal{M}}$上是一个测度. 即为Lebesgue测度

度量空间的Borel测度

定义 设X集合. $d: X\times X\to[0,+\infty)$满足

① $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

② $d(x,y)=d(y,x)$

③ $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ $\forall x,y,z\in X$.

则称(X,d)为度量空间

例 ① $\mathbb{R}^n$ $d(x,y)=|x-y|$

② 设$K\subset\mathbb{R}^n$ 紧. 在$C^0(K)$上定义 $d(f,g)=\sup_{x\in K}|f(x)-g(x)|$

设(X,d)度量空间 定义 $B_r(x)=\{y\in X \mid d(x,y)<r\}$

$O\subset X$称为开集. 若$\forall x\in O$. $\exists r$. $B_r(x)\subset O$

$F\subset X$ 称为闭集. 若F^c是开集

X上所有开集生成的σ-代数称为Borel σ-代数. 记为$\mathcal{B}_X$.(包含开集最小的)

Borel集. $\mathcal{B}_X$中的集合

设$A, B\subset X$. 定义距离. $d(A,B)=\inf\{d(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$.

定义（度量外测度）若 μ_* 满足 $\mu_*(A\cup B)=\mu_*(A)+\mu_*(B)$，若 $d(A,B)>0$，
则称 μ_* 为度量外测度

定理. 对上述 μ_*，$\mu_*|_{B_X}$ 是一个测度，即所有 Borel 集是可测的，该测度称为 Borel 测度

$(X,\mathcal{M},\mu)$ 测度空间，σ 有限

① $f: X\to\bar{\mathbb{R}}$　$f^{-1}([-\infty,a))=\{x\in X \mid f(x)<a\}\in\mathcal{M}$　$(\forall a\in\mathbb{R})$ 可测

② $f: X\to\mathbb{C}$. 若 $\mathrm{Re}f$, $\mathrm{Im}f$ 都可测，称 f 可测

③ $f=g$ a.e. $\Leftrightarrow$ $\mu(\{x\in X \mid f\neq g\})=0$

④ 简单函数 $f=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}$，$E_k$ 可测，$\mu(E_k)<\infty$.

定理 ① 若 f 非负可测，则存在一列非负简单 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 且 $\varphi_k\nearrow f$.

② 若 f 可测，则存在简单 $\{\varphi_k\}$ 使 $|\varphi_k|\le|\varphi_{k+1}|$，$\lim_{k\to\infty}\varphi_k=f$

定义 给定 σ 有限 $(X,\mathcal{M},\mu)$

① 对非负简单 $\varphi=\sum_{k=1}^{N}c_k\chi_{E_k}$　$\int_X\varphi\,d\mu=\sum_{k=1}^{N}c_k\mu(E_k)$

② 对 f 非负可测. $\int_X f\,d\mu=\sup\{\int_X\varphi\,d\mu \mid \varphi$ 简单 $0\le\varphi\le f\}$

③ 对 $f: X\to\bar{\mathbb{R}}$ 可测. 若 $\int_X f^+$，$\int_X f^-$ 至少有一个有限.

则定义 $\int_X f=\int_X f^+-\int_X f^-$

若两者都有限，则称 f 在 X 上可积

④ 若 E 可测 f 在 E 上可测　$\int_E f\,d\mu=\int_X f\cdot\chi_E\,d\mu$.

定理. 单调收敛定理，Fatou 引理，控制收敛定理成立

例. $(\mathbb{N},\mathcal{P},\mu)$　$\mathcal{P}$ 所有子集构成的集类　μ: 计数测度

对 $f: \mathbb{N}\to[0,+\infty]$

$$\int_{\mathbb{N}}f\,d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\{k\}}f\,d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{N}}f(x)\chi_k(x)\,d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}f(k)\mu(\{k\})=\sum_{k=1}^{\infty}f(k)$$

例 (X, P, δ_a) P为所有子集 $\delta_a(A)$ Dirac 测度

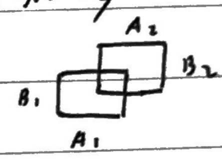
$$\int_X f(x)\,d\mu = \int_{\{a\}} f(x)\,d\mu + \int_{X\setminus\{a\}} f(x)\,d\mu = \int_X f(x)\chi_a(x)\,d\mu = f(a)$$

乘积测度

问题 给定 (X_1, m_1, μ_1) (X_2, m_2, μ_2) 如何定义 $\mu_1\times\mu_2$

设 $A\in m_1$ $B\in m_2$ $A\times B=\{(x,y) \mid x\in m_1\ y\in m_2\}$ 可测矩形

性质 ① $\{A\times B \mid A\in m_1, B\in m_2\}$ 不是代数



$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$

但 $\mathcal{A}=\{E \mid E$为有限个不交的可测矩形的并$\}$ 是 $X_1\times X_2$ 上代数

定义 ① 对可测矩形 $A\times B$. 定义 $\mu_0(A\times B)=\mu_1(A)\mu_2(B)$

则 μ_0 可延拓到 $\mathcal{A}$ 上 且延拓是唯一的

$A\times B=\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j\times B_j)$ $\{A_j, B_j\}$ 不交. 则 $\mu_0(A\times B)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_1(A_j)\mu_2(B_j)$

② μ_0 是 $\mathcal{A}$ 上预测度

③ 对 $E\subset X_1\times X_2$ 定义

$$\mu_*(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(E_k).\ E_k\in\mathcal{A}.\ 且 E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right\}.$$

μ_* 是 $X_1\times X_2$ 的外测度

④ 设 m 是 $\mathcal{A}$ 生成的 σ 代数. 记为 $m_1\otimes m_2$ 则 $\mu_*|_m$ 上是测度

记为 $\mu_1\times\mu_2$ 则有乘积测度空间 $(X_1\times X_2\ \ m_1\otimes m_2\ \ \mu_1\times\mu_2)$

截口. $E\subset X_1\times X_2$

$\forall x\in X_1$. $E_x=\{y\in X_2 \mid (x,y)\in E\}$

$\forall y\in X_2$. $E^y=\{x\in X_1 \mid (x,y)\in E\}$

对 $f(x,y)$ $f_x(y)=f^y(x)=f(x,y)$

性质 ① 设 $E\in m_1\otimes m_2$ 则 $E_x\in m_2$ $\forall x\in X_1$ $E^y\in m_1$ $(\forall y\in X_2)$

② 若 $f(x,y)$ 是 $\mu_1\times\mu_2$ 可测. 则 f_x 是 μ_2 可测 f^y 是 μ_1 可测

Fubini - Torelli 定理 设 $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ σ-有限 对 $(X_1\times X_2, \mathcal{M}_1\otimes\mathcal{M}_2, \mu_1\times\mu_2)$

① 若 $f(x,y)$ 是 $\mu_1\times\mu_2$ 可测 非负，则 $g(x)=\int_{X_2} f_x(y)\,d\mu_2$ 在 $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ 非负可测

$h(y)=\int_{X_1} f^y(x)\,d\mu_1$ 在 $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ 非负可测.

且 $\int_{X_1\times X_2} f(x,y)\,d(\mu_1\times\mu_2)=\int_{X_1}(\int_{X_2} f_x(y)\,d\mu_2)\,d\mu_1=\int_{X_2}(\int_{X_1} f^y(x)\,d\mu_1)\,d\mu_2$

② (Fubini) 若 f 在 $\mu_1\times\mu_2$ 上可积 则

a.e $x\in X_1$ $f_x(y)$ 在 X_2 上 μ_2 可积,

a.e $y\in X_2$ $f^y(x)$ 在 X_1 上 μ_1 可积,

且 $g(x)=\int_{X_2} f_x(y)\,d\mu_2$ 是 μ_1 可积, $h(y)=\int_{X_1} f^y(x)\,d\mu_1$ 是 μ_2 可积,

且 ① 中等式成立

说明 $(X_1\times X_2, \mathcal{M}_1\otimes\mathcal{M}_2, \mu_1\times\mu_2)$ 一般不完备

例 取 $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)=(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)=(\mathbb{R}^1, \mathcal{M}, \mu)$ Lebesgue 测度.

设 $E\subset\mathbb{R}^1$ $E\notin\mathcal{M}$

设 $A\subset\mathbb{R}^1$, $\mu(A)=0$ $A\times E\notin\mathcal{M}_1\otimes\mathcal{M}_2$

但 $A\times E\subset A\times\mathbb{R}$, $(\mu_1\times\mu_2)(A\times\mathbb{R})=0$

完备化. 设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 测度空间

令 $\mathcal{R}=\{N\in\mathcal{M} \mid \mu(N)=0\}$

$\bar{\mathcal{M}}=\{E\cup F \mid E\in\mathcal{M}, F\subset N\in\mathcal{R}\}$

则 $\bar{\mathcal{M}}$ 为 σ-代数 且 $\mathcal{M}\subset\bar{\mathcal{M}}$

对 $\bar{\mathcal{M}}$ 上集合 $E\cup F$ 定义 $\bar{\mu}(E\cup F)=\mu(E)$

则 $\bar{\mu}$ 为 $(X, \bar{\mathcal{M}})$ 上测度. 且 $(X, \bar{\mathcal{M}}, \bar{\mu})$ 为完备测度空间 $\bar{\mu}|_{\mathcal{M}}=\mu$

Lebesgue 测度空间的构造

① $X=\mathbb{R}^1$ $\mathcal{A}=\{$中的有限互不相交半开区间的并$\}$.

$\mu_0(\bigcup_{i=1}^{k}(a_i, b_i])=\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)$ 不交. 预测度.

② μ_0 定义 X 上外测度 μ^*. $\mathcal{A}$ 生成 σ-代数 记 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ Borel 代数.

$\mu^*|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)}$ 是测度 Borel 测度.

② 它的完备化 $(\mathbb{R}^1, \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)}, \overline{\mu})$ 称为 Lebesgue 测度空间 $\overline{\mu}$ 为 Lebesgue 测度

$\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)}$ 中的集合称为 Lebesgue 可测集

例 设 $a_{ij} \geq 0$ 或 $\sum_{i,j}|a_{ij}| < \infty$. 则 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$

证 令 $X_1 = \mathbb{N}$, $X_2 = \mathbb{N}$ $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ 计数测度.

① $f(i,j) = a_{ij} \geq 0$.

由 Tonelli 即可.

例. 极坐标. $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. $(0,\infty) \times S^{d-1}$

$x \longleftrightarrow (r, \gamma)$

(X_1, m_1, μ_1) $X_1 = (0,\infty)$. $m_1 = \{(0,\infty)$ Lebesgue 可测集$\}$. $d\mu_1 = r^{d-1}dr$.

(X_2, m_2, μ_2) $X_2 = S^{d-1}$ $E \in m_2 \Leftrightarrow \widetilde{E} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \frac{x}{|x|} \in E,\ 0 < |x| < 1\}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中可测

$\mu_2 = \sigma$.

则 (X_1, m_1, μ_1) (X_2, m_2, μ_2) 完备 σ 有限测度空间

定理. 设 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积.

① 对 a.e. $\gamma \in S^{d-1}$ $f^{\gamma}(r) = f(r,\gamma)$ 关于测度 $r^{d-1}dr$ 可积.

② $\int f^{\gamma}(r)\,d\mu_1$ 在 S^{d-1} 上可积,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_{S^{d-1}}\left(\int_0^{\infty} f(r,\gamma)\, r^{d-1}dr\right) d\sigma.$$