

第一章 复数与复变函数

§1.1 复数的定义与运算

$$\mathbb{C} = \{a+ib \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad i^2 = -1$$

命题 1. $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z - \bar{z}) \quad (1) \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(3) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad (4) \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad |\bar{z}| = |z|$

命题 2. $|z+w| \leq |z| + |w|$ (三角不等式)

等号 $\Leftrightarrow \exists t \geq 0 \quad z = tw$ 或 $w = tz$

证 $|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|$
 $= (|z| + |w|)^2$

等号成立 $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}| \Leftrightarrow z\bar{w} = t' \geq 0 \Leftrightarrow z|w|^2 = t'w$

§1.2. 复数的几何表示

$\forall z = a+ib \neq 0 \quad \exists |z| = r$ 则 $\exists \theta$ s.t. $z = a+ib = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

θ 称为 z 的一个辐角 $\operatorname{Arg} |z| = \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ z 的所有辐角

$\operatorname{Arg} \theta$ 中满足 $-\pi < \theta \leq \pi$ 的称为辐角主值. 记为 $\arg z$

$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

$= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$

例 z_1, z_2 垂直 $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$

证 z_1, z_2 垂直 $\Leftrightarrow \arg \frac{z_1}{z_2} = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ s.t. $\frac{z_1}{z_2} = it \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 = it |z_2|^2$

例 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 与 $\triangle w_1 w_2 w_3$ 相似 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

相似 $\Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1}$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

No.

Date. / /

例 $z^k = 1$

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

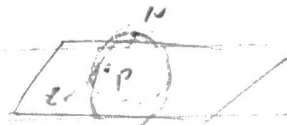
§1.3. 扩充复平面

$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ∞ 称为无穷远点

$$z \pm \infty = \infty \quad z \cdot \infty = \infty \quad (z \neq 0)$$

球极投影 $\mathbb{C}$ 与 $S^1 \setminus \{N\}$ 一一对应 $\mathbb{C}_\infty$ 与 S^2 一一对应

一点紧致化 Riemann 球面



§1.4. 复数序列的极限

定义称 $\mathbb{C}$ 中复数序列 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0 . 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_0| = 0$ 称 $\{z_n\}$ 收敛于 ∞

如果 $\forall M > 0 \exists N. n > N$ 时 $|z_n| > M$ $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$

$$B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\} \quad B(\infty, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$$

$\{z_n\}$ 称为 Cauchy 列 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N. n, m > N$ 时 $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

定理. $\{z_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{z_n\}$ 为 Cauchy 列 (完备性)

§1.5 $\mathbb{C}$ 上的拓扑

定义 $U \subset \mathbb{C}$ 称为开集 $\forall z \in U. \exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(z, \varepsilon) \subset U$

$E \subset \mathbb{C}$ 为闭集 如果 E^c 为开集

聚点 $\forall \varepsilon > 0. (B(z, \varepsilon) \setminus \{z\}) \cap E \neq \emptyset$

$\bar{E}$ E 和 E 的所有聚点的并. $\bar{E} = \bigcap_{F \text{ 闭且 } F \supset E} F$

$E \subset \mathbb{C}$ 称为紧致集 如果 E 每个开覆盖都有有限子覆盖

定理 设 $E \subset \mathbb{C}$ 为紧致集. $F \subset \mathbb{C}$ 为闭集. $E \cap F = \emptyset$ 则 $d(E, F)$

$$= \inf \{|z - w| \mid z \in E, w \in F\} > 0$$

证. $\forall a \in E. \exists \varepsilon_a = \frac{1}{2} d(a, F) \quad B(a, \varepsilon_a) \cap F = \emptyset$

$\{B(a, \varepsilon_a) \mid a \in E\}$ 为 E 的开覆盖 有限覆盖 $B(a_i, \varepsilon_{a_i})$ 取 ε_{a_i} 最小 $= \delta$

$$\forall z \in E, \exists \delta, z \in B(a; \delta)$$

$$\forall w \in F, |z-w| \geq |w-a| - |a-z|$$

$$\geq |z-a| - \delta > \delta$$

§ 1.6. 曲线与域

设 $x(t), y(t)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数, 则映射: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ 称为曲线

可成长曲线 $|\gamma| = \sup \sum_k |\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})| < +\infty$

$\Leftrightarrow x(t), y(t)$ 为连续的具有有限变差的函数

光滑曲线: $x(t), y(t)$ 为 C^1 函数 $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$

$$\text{此时 } |\gamma| = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

分段光滑曲线

简单曲线 自身不相交 简单闭曲线 起点终点重合

定义: 设 $E \subset \mathbb{C}$ 称 E 为连通 如果 E 表示为两个非空不相交果合的并, 则 $E_1 \cap \bar{E}_2 \neq \emptyset$ 或 $\bar{E}_1 \cap E_2 \neq \emptyset$

命题 1. 开集 $E \subset \mathbb{C}$ 连通 $\Leftrightarrow E$ 不能表示为两个非空不相交开集的并

证 $(\Rightarrow)$ 设 E 连通 $E_1, E_2 \neq \emptyset, E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow E_1 \subset E_2^c \Rightarrow \bar{E}_1 \subset E_2^c$

$\Rightarrow \bar{E}_1 \cap E_2 = \emptyset$ 同理 $E_1 \cap \bar{E}_2 = \emptyset$ 矛盾

$(\Leftarrow)$ 设 E 不连通 $E = E_1 \cup E_2, E_1, E_2$ 非空不相交

且 $E_1 \cap E_2^c = \emptyset, E_2 \cap \bar{E}_1 = \emptyset$

$\forall z \in E_1, z$ 不是 E_2 聚点, $\exists \delta_1 > 0$ s.t. $B(z, \delta_1) \cap E_2 = \emptyset$

E 开, $z \in E, \exists \delta_2 > 0, B(z, \delta_2) \subset E$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 则 $B(z, \delta) \subset E_1 \Rightarrow E_1$ 开

同理 E_2 开, 矛盾

定义 $E \subset \mathbb{C}$ 称为道路连通 如果 $\forall z, w \in E$ 存在曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ s.t.
 $\gamma(a) = z$ $\gamma(b) = w$.

命题 2. 若 $E \subset \mathbb{C}$ 为非空开集, 则 E 连通 $\Leftrightarrow E$ 为道路连通

证 ($\Rightarrow$) $\forall a \in E$ $E_1 = \{z \in E \mid \exists \gamma \text{ 到 } a \text{ 的道路}\}$

$E_2 = E \setminus E_1 \Rightarrow E_1, E_2$ 易知为开 (局部道路连通) 矛盾

($\Leftarrow$) $E = E_1 \cup E_2$ E_1, E_2 不相交开集

设 $z_1 \in E_1$ $z_2 \in E_2$ $\exists$ 曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ $\gamma(a) = z_1$ $\gamma(b) = z_2$

令 $A = \{t \in [a, b] \mid \gamma(s) \in E_1, a \leq s < t \neq b\}$ A 有上界 令 $t^* = \sup A$

若 $\gamma(t^*) \in E_1$ E_1 为开 由 γ 连续性 $\exists \delta > 0$ s.t. $t^* + \delta \in A$ $\times$

$\gamma(t^*) \in E_2$ 类似有矛盾

定理 3 (若当分割定理). 一条简单闭曲线将 $\mathbb{C}$ 分为两个区域, 一个是有界的

称为 γ 内部, 另一个是无界的, 称为 γ 的外部 γ 是共同的边界

定义 如果区域 D 的任意简单闭曲线的内部仍在 D 中.

§1.7. 复变函数的极限与连续性

设 $E \subset \mathbb{C}$, 映射 $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ 称为复变函数. 设 z_0 为 E 的聚点, $a \in \mathbb{C}$, 若对

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $z \in E$ 且 $|z - z_0| < \delta$ 时 $|f(z) - a| < \varepsilon$, 则称 $z \rightarrow z_0$ 时 f 以 a 为

极限. 记为 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$

设 $z_0 \in E$, 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ 则称 f 在 z_0 处连续. 若 f 在 E 中每一点处连续

则称 f 在 E 中连续.

命题 $E \subset \mathbb{C}$ 为紧致集, $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ 连续, 则

(1) f 有界. ($\exists m > 0, |f(z)| \leq m \forall z \in E$)

(2) $|f|$ 在 E 中能取到最值

(3) f 在 E 上一致连续.

第二章 全纯函数

§2.1 复数函数的导数

定义 $D \subset \mathbb{C}$ 为区域 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ $z_0 \in D$. 如果 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 存在, 则称 f 在 z_0 处可导. 极限记为 $f'(z_0)$

如果 f 在 D 中每一点可导, 则称 f 在 D 中全纯 (holomorphic)

注称 f 在 z_0 处全纯. 如果 f 在 z_0 的某个邻域中全纯

定义. 如果存在 $A \in \mathbb{C}$ 使得 $f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + A \Delta z + o(|\Delta z|)$ 则称 f 在 z_0 处可微
易见 f 在 z_0 处可导 $\Leftrightarrow$ 可微. 此时 $A = f'(z_0)$

命题 1. 若 f 在 z_0 处可微, 则 f 在 z_0 处连续

例. $f(z) = \bar{z} = x - iy$ 连续 对 $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \text{ 不存在.}$$

处处连续. 处处不可导

命题 2. (1) $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$

$$(2) (f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$(3) \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$$

$$(4) (g \circ f(z))' = g'(f(z)) \cdot f'(z)$$

§2.2. Cauchy-Riemann 方程

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ u, v 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处可微. $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

则. $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + o(|\Delta z|)$$

$$= \frac{\partial(u + iv)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial(u + iv)}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|)$$

No.

Date. / /

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta z + i\Delta \bar{z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta \bar{z} - i\Delta z}{2i} + o(|\Delta \bar{z}|) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Delta \bar{z} + o(|\Delta \bar{z}|) \\
 \text{记号} \quad &\frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z} + o(|\Delta \bar{z}|)
 \end{aligned}$$

定理1. $f(z) = u + iv$ 在 z_0 处可微 $\Leftrightarrow u(x, y), v(x, y)$ 在 z_0 处可微, 且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$

证 $\Leftarrow$ 由上面的计算即可.

$\Rightarrow$ 设 f 可微 则 $\exists A = a + ib \in \mathbb{C}$

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (a + ib) \Delta z + o(|\Delta z|)$$

$$\text{两边取实部} \quad u(z_0 + \Delta z) - u(z_0) = a \Delta x - b \Delta y + o(|\Delta z|)$$

$\Rightarrow u$ 可微. 同理 v 也可微

$$f(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right), \text{ 由复合函数求导}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i \frac{\partial(u+iv)}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_x - v_y = 0 \\ u_y + v_x = 0 \end{cases} \quad \text{Cauchy - Riemann 方程}$$

定理2. $f(z) = u + iv$ 在 z_0 处可微 $\Leftrightarrow u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微, 且满足 C-R 方程

$$\begin{aligned}
 f \text{ 可微时} \quad f'(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} - i \frac{\partial(u+iv)}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (u_x + v_y) + \frac{i}{2} (v_x - u_y) = u_x + iv_x
 \end{aligned}$$

$$\text{例 1. (1)} \quad f(z) = z^n \quad f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = n z^{n-1}$$

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = n z^{n-1}$$

$$(2) \quad f(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$$

f 在 $z=0$ 处可微

例 1) $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}$

(2) $g \circ f(z) = g(f(z)) = g(f(z, \bar{z}), \overline{f(z, \bar{z})})$

$$\frac{\partial (g \circ f(z))}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial (g \circ f(z))}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

例 设 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯 且 $|f| = \text{常数} \Rightarrow f = \text{常数}$

证. 1) $f = u + iv, \quad u^2 + v^2 = \text{const} \neq 0 \quad (= 0 \text{ 时 } f = 0 \quad \checkmark)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2u \cdot u_x + 2v \cdot v_x = 0 & (1) \\ 2u u_y + 2v v_y = 0 & (2) \end{cases}$$

由 C-R. $-2u v_x + 2v u_x = 0$

$$(1) \times u + (2) \times v \Rightarrow 2(u^2 + v^2) u_x = 0 \Rightarrow u_x = 0 = v_y$$

同理可得 $u_x = 0 = -u_y \Rightarrow u, v$ 都是常数

(2) $|f|^2 = f \cdot \bar{f} = \text{常数} \Rightarrow \frac{\partial (f \cdot \bar{f})}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \bar{f} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \cdot f = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \bar{f} = 0$$

不妨设 $|f|^2 = c \neq 0 \Rightarrow \bar{f} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \forall z \in D$

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$u_r = u_x \cdot x_r + u_y \cdot y_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta$$

$$u_\theta = u_x(-r \sin \theta) + u_y r \cos \theta$$

$$v_r = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta$$

$$v_\theta = v_x(-r \sin \theta) + v_y r \cos \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\theta \\ v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \end{cases}$$

例 1) $f(z) = \log |z| + i \arg z = \log r + i\theta$ 在 $z \neq 0$ 处可微.

$H(D) = \{f: D \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ 在 } D \text{ 上全纯}\}$

定理 3. 设 $f = u + iv \in H(D)$ 设 $u, v \in C^2(D)$ (其实含在全纯里). 则 u, v 为调和函数. 即 $\Delta u = 0 \quad \Delta v = 0$

No.

Date.

$$\text{证 } \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y = 0$$

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = (-u_y)_x + (u_x)_y = 0$$

定义. 设 u, v 为 D 上的调和函数. 若 $u+iv$ 全纯, 则称 v 为 u 的共轭调和函数.
(u 不一定是 v 的共轭调和函数)

定理 4. 设 D 为单连通区域, u 为 D 上的调和函数, 则存在 u 的共轭调和函数.

$$\text{证 寻找 } v, \quad v_x = -u_y, \quad v_y = u_x$$

$$\text{可以取 } v(x, y) = \int_{(a, b)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy.$$

在 D 中任取简单闭曲线 L . 由于 D 单连通, L 的内部包含在 D 中

$$\int_L -u_y dx + u_x dy = \iint_R d(-u_y dx + u_x dy) = \iint_R (u_{yy} + u_{xx}) dx \wedge dy = 0$$

故 $v(x, y)$ well-defined.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h -u_y dx = -u_y$$

$$\text{同理 } v_y = u_x \Rightarrow u+iv \text{ 全纯}$$

命题 4. 设 $u(x, y) \in C^2(D)$ 则 $\Delta u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$

$$\text{证. } \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) - i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{4} \Delta u.$$

例. 设 D 为域, $f: D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 全纯. 证明 $\log |f(z)|$ 为调和函数

$$\text{证 } \Delta \log |f(z)| = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log |f(z)|$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log |f(z)| = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log |f(z)|^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log (f(z) \cdot \overline{f(z)})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \bar{f} + f \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}}{f(z) \cdot \overline{f(z)}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{f}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad \rightarrow \text{承认可以交换次序}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} \log |f(z)| = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{f} \right) = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot f - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}}{f^2} = 0$$

例 $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $u(z) = \log |z|$ 则 $u(z)$ 在 D 上调和 但是不存在 u 的共轭调和

证. (反证法) 假设 v 为 u 的共轭调和函数

则 $f(z) = \log |z| + iv$ 在 D 上全纯

考虑 $g(z) = \log |z| + i \arg |z| = \log r + i\theta$ ($z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $r = |z| \in (0, +\infty)$)

则 $g(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上全纯.

从而 $f(z) - g(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上全纯 且 $\operatorname{Re}(f - g) = 0$

$\Rightarrow f(z) - g(z) = c$ 为常数 ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$)

$$f(-1) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(-1+iy) = \lim_{y \rightarrow 0^+} (g(-1+iy) + c) = i\pi + c$$

$$\text{另一方面 } f(-1) = \lim_{y \rightarrow 0^-} f(-1+iy) = -i\pi + c$$

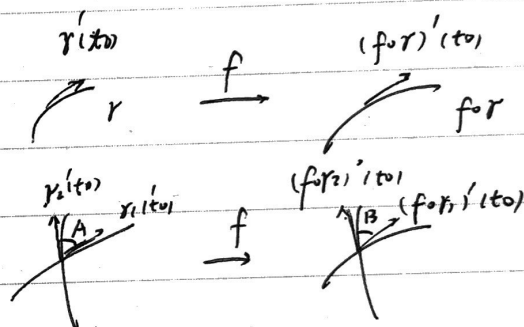
§ 2.3. 导数的几何意义

$f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯 $z_0 \in D$, $f'(z_0) \neq 0$

设 $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ $\gamma(t_0) = z_0$

$$\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$$

$$\angle A = \arg \frac{\gamma'(t_0)}{\gamma'(t_0)} \quad \angle B = \arg \frac{(f \circ \gamma)'(t_0)}{(f \circ \gamma)'(t_0)} = \angle A$$



结论: 当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, f 在 z_0 处是保角的. $|f'(z_0)|$ 为切向量的长度比.
即 f 在 z_0 处的“伸缩率” $\Rightarrow f$ 在 z_0 处是共形的

设 $f = u + iv$ 全纯 $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$

$$Jf = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |u_x + iv_x|^2 = |f'(z_0)|^2$$

Prob. 17

设 $f = u + iv$ 在 z_0 处实可微 (u, v 为可微) 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ 存在, 则 $f(z)$

或 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 处可微

证 当 f 实可微时 $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \Delta \bar{z} + o(|\Delta z|)$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \right|^2 = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} + o(1) \right|^2$$

No.

Date. / /

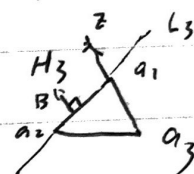
$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (|a|^2 + |b|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{a}b \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z}))$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Re}(\bar{a}b \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z}) \text{ 存在 } \Rightarrow \bar{a}b = 0$$

$$(\forall \theta \exists \Delta z \text{ s.t. } \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} = e^{i\theta} \text{ (取 } z = e^{-\frac{i}{2}\theta})$$

$$\Rightarrow a=0 \text{ 或 } b=0$$

例 设 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ 不共线 $p(z) = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)$ 证明 $p'(z)$ 的零点在 $\triangle a_1 a_2 a_3$ 中.



证 只需证 $p'(z)$ 在 H_3 中无零点.

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{z-a_i}$$

取 $B \in \mathbb{C}$ 方向如图. $\forall z \in H_3$ $z-a_i$ 与 B 的夹角 θ 满足 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

注 u, w 夹角 $\theta \Rightarrow \arg \frac{w}{z} = \theta$ 或 $\arg \frac{z}{w} = \theta$

$$\frac{w}{z} = \left| \frac{w}{z} \right| e^{i\theta} \Rightarrow \frac{1}{z-w} = \left| \frac{w}{z} \right| e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow z \cdot \bar{w} = |z| \cdot |w| \cdot e^{-i\theta} \Rightarrow \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) > 0$$

$$\therefore \operatorname{Re}(B \cdot \overline{(z-a_i)}) > 0 \quad \forall i=1,2,3$$

$$\operatorname{Re}\left(B \cdot \frac{p'(z)}{p(z)}\right) = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^3 \frac{B}{z-a_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\operatorname{Re}(B \cdot \overline{(z-a_i)})}{|z-a_i|^2} > 0$$

$$\Rightarrow p'(z) \neq 0$$

注 复变函数中值定理,

§2.4. 初等函数

1. 指数函数

设 $z = x+iy$ 定义 $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

e^z 在 $\mathbb{C}$ 上全纯

$$(1) (e^z)' = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

$$(2) e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$(3) \forall z \in \mathbb{C} \quad e^z \neq 0 \quad (|e^z| = e^x)$$

$$(4) e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

(5) e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数

定义 设 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯. 如果区域 $D \subset \mathbb{C}$, $f|_D$ 是单射, 则称 f 在 D 上是单叶的. D 称为 f 的一个单叶性域

$$|x+iy| \quad 2k\pi < y < 2(k+1)\pi \quad \xrightarrow{\text{单叶}} \quad \mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$$

2. 三角函数

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\cos z = e^{iz} \xrightarrow{iz \rightarrow z} e^z \xrightarrow{z \rightarrow iz} \cos z$$

(1) $\sin z, \cos z$ 为整函数

(2) $\sin z, \cos z$ 以 2π 为周期

$$(3) \cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z$$

$$(4) \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$(5) \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$(6) \sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \quad \cos z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

3. 对数函数

设 $z \neq 0$. 若 $e^w = z$, 则称 w 为 z 的对数. $\log z$

$$\text{若 } z = re^{i\theta} \quad w = x+iy \text{ 且 } e^w = z, \text{ 则 } e^x = r \Rightarrow x = \log r$$

$$e^{iy} = e^{i\theta} \Rightarrow y = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \log z = \log |z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad \text{多值函数}$$

$$\text{取固定的 } k_0, \text{ 则 } w_{k_0} = \log |z| + i(\arg z + 2k_0\pi)$$

w_{k_0} 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上不连续 ($(-\infty, 0]$ 上不连续)

No.

Date. / /

但 w_k 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 中连续且全纯

$\log z$ 在 D 内的单值分支

定义 设 $D \subset \mathbb{C}$, $0 \notin D$ 若存在全纯函数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 满足 $e^{f(z)} = z$
 $\forall z \in D$. 则称 $f(z)$ 为 $\log z$ 的单值分支

例 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \neq 0, 0 \leq \arg z < 2\pi\}$

$$f(z) = \log |z| + i\theta \quad (0 \in \arg z, \text{ 且 } -\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$$

$f(z)$ 为 $\log z$ 在 D 内的单值分支

注意, $f(z)$ 与 w_k 的区别

定理 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为单连通区域, $0 \notin D$. 则 $\log z$ 在 D 内有单值分支

证 已知 $\log |z|$ 在 D 上调和. 由于 D 单连通存在调和函数 $v(z)$

s.t. $\log |z| + i v(z)$ 在 D 上全纯

任取 $z_0 \in D$. 取 $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ s.t. $v(z_0) + \alpha_0 = \arg z_0$

令 $f(z) = \log |z| + i(v(z) + \alpha_0)$ $f(z)$ 全纯

$$e^{f(z)} = e^{\log |z| + i \arg |z|} = z$$

$|e^{f(z)}| = |z| \Rightarrow \frac{e^{f(z)}}{z}$ 全纯且模长恒为 1. 故

$$\frac{e^{f(z)}}{z} = \frac{e^{f(z_0)}}{z_0} = 1 \Rightarrow \forall z, e^{f(z)} = z \quad f(z) \text{ 为 } \log z$$

定义 当 z 沿着包围 z_0 的简单闭曲线绕一周时 (为保持连续性) 多值函数的值回不到初始值. 则称 z_0 为多值函数的一个支点.

$z=0$, $z=\infty$ 为 $\log z$ 的支点.

取连续支点 0 和 ∞ 的曲线 Γ . $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ 中就不存在支点. 为 0 或 ∞ 的闭曲线

$\log z$ 在 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ 中有单值分支. Γ 称为割线

例. $f(z) = -\log(z+1) + \log(z-1)$ $C: |z|=1$

$z=1, -1$ 为 f 的支点.



z 沿大闭曲线 γ 一周时

$\log(z+1)$ 增量 $= 2\pi i$ $\log(z-1)$ 时增量为 $2\pi i$

$\Rightarrow f(z)$ 的增量为 0 $\Rightarrow \infty$ 不是支点.

3. 幂函数

$$f(z) = w = z^\mu \quad (\mu \in \mathbb{C})$$

$$\text{定义 } z^\mu = e^{\mu \log z} = e^{\mu(\log|z| + i \arg z)}$$

(1) $\mu \in n \in \mathbb{Z}_+$

$$z^n = e^{n(\log|z| + i \arg z + i 2k\pi)} = e^{n \log|z| + ni \arg z} e^{i 2kn\pi} = 1$$

单值整函数

(2) $\mu = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad \theta = \arg z$

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

$z=0 \quad z=\infty$ 为支点

(3) 设 $\mu = a + ib$

$$\begin{aligned} f(z) = z^\mu &= e^{\mu \log(z)} = e^{(a+ib)(\log|z| + i\theta + i 2k\pi)} \\ &= e^{a \log|z| - b(\theta + 2k\pi)} e^{i(b \log|z| + a(\theta + 2k\pi))} \end{aligned}$$

① $b=0 \quad a=n \in \mathbb{Z}_+$ 时 $f(z)$ 为单值

② $b=0 \quad a=\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad (q>0)$ 时 $f(z)$ 为 q -值函数

③ $b=0 \quad a \notin \mathbb{Q}$ 时 $f(z)$ 为无穷多值函数

④ $b \neq 0 \quad f(z)$ 为无穷多值函数

$$(z^\mu)' = (e^{\mu \log z})' = e^{\mu \log z} \cdot \frac{1}{z} = \mu z^{\mu-1}$$

例. $\sqrt{z} \xrightarrow{z \rightarrow z-a} \sqrt{z-a} \xrightarrow{z \rightarrow z^2} \sqrt{z^2} \xrightarrow{z \rightarrow z+h^2} \sqrt{z+h^2}$

No.

Date. / /

$$151) f(z) = \sqrt[n]{(z-a_1)^{\beta_1} \cdots (z-a_n)^{\beta_n}} \quad \beta_i \in \mathbb{C}$$

$$f(z) = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i \log(z-a_i)}$$

$$= e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\beta_i \log|z-a_i| + i \beta_i \operatorname{Arg}(z-a_i))} = e^{g(z)}$$

z 沿包含 a_i 的闭曲线一周时, $g(z)$ 的增量 $= \frac{\beta_i}{n} 2\pi i$

a_i 为支点 $\Leftrightarrow \beta_i$ 不是 n 的倍数

z 沿包大闭曲线一周时 $g(z)$ 的增量 $= \frac{\sum \beta_i}{n} 2\pi i$

∞ 为支点 $\Leftrightarrow \sum \beta_i$ 不是 n 的倍数

$$151) f(z) = \sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}} \cdot \frac{1}{1+z} \quad z \neq -1$$

$$f(z) = \frac{1}{1+z} e^{\frac{3}{2} \log(1-z) - \frac{1}{2} \log z}$$

$$= \frac{1}{1+z} e^{\left(\frac{3}{2} \lg|1-z| - \frac{1}{2} \lg|z| + i\left(\frac{3}{2} \operatorname{Arg}(1-z) - \frac{1}{2} \operatorname{Arg} z\right)\right)} = \frac{1}{1+z} e^{g(z)}$$

z 绕 0 一周时, $g(z)$ 的增量 $= -\frac{1}{2} \times 2\pi i = -\pi i$ 0 为支点.

z 绕 1 一周时 $\dots = \frac{3}{2} \times 2\pi i = 3\pi i$ 1 为支点.

z 绕 ∞ 一周时 $\dots = 2\pi i \Rightarrow \infty$ 不是支点

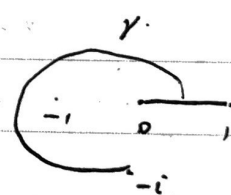
$f(z)$ 在 $C \setminus \{0, 1\} \cup \{-1\}$ 有单值分支

设 ρ 在 $[0, \pi]$ 上取正值, 求 $f(-i)$

$z \in [0, 1]$ 取 $z = 1-z$ 的幅角为 0

z 沿 ρ 运行到 $-z$ 时 $z = 1-z$ 的幅角为 $\frac{3}{2}\pi$ 和 $\frac{\pi}{4}$

$$f(-i) = \frac{1}{-i} e^{\frac{3}{2} \lg|1+i| - \frac{1}{2} \lg|1-i| + i\left(\frac{3}{2} \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\pi\right)} =$$



§ 25 分式线性变换

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad-bc \neq 0 \quad \text{分式线性变换}$$

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ① $c \neq 0$, f 在 $\mathbb{C} \setminus \{1-\frac{d}{c}\}$ 中全纯

② $c = 0$ f 在 $\mathbb{C}$ 上全纯

$$f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty \quad \textcircled{1} c \neq 0 \quad f(-\frac{d}{c}) = \infty \quad f(\infty) = \frac{a}{c}$$

$$\textcircled{2} c = 0. \quad f(\infty) = \infty$$

$$c=0 \text{ 时 } f(z) = Az + B \quad (A \neq 0) \quad A = re^{i\theta}$$

$$z \xrightarrow{e^{i\theta}} e^{i\theta} \cdot z \xrightarrow{r} re^{i\theta} z \xrightarrow{B} re^{i\theta} z + B$$

$$c \neq 0 \text{ 时 } f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \quad z \rightarrow \frac{1}{z} \text{ (反演)}$$

定义 设 γ 是以 a 为圆心, R 为半径的圆周. 如果 $z_1 - a = \frac{R^2}{z_2 - a}$, 则称 z_1, z_2 为关于 γ 的对称点.

证. 条件 $\Rightarrow z_1 - a$ 与 $z_2 - a$ 平行 $\Rightarrow a, z_1, z_2$ 共线.

圆周的表示,

$$\text{ii) 设 } \left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = k \quad (z_1, z_2 \text{ 给定且 } z_1 \neq z_2)$$

$$(i) \quad k \neq 1, \quad |z-z_1| = k|z-z_2|$$

$$\text{注意若 } |z_1| = \lambda |z_2| \quad \text{则 } |z_1 - \lambda^2 z_2| = \lambda |z_1 - z_2|$$

$$\therefore |z-z_1 - k^2(z-z_2)| = k|(z-z_1) - (z-z_2)|$$

$$\Rightarrow \left| z - \frac{z_1 - k^2 z_2}{1-k^2} \right| = \frac{k}{1-k^2} |z_1 - z_2|$$

(ii) $k=1$ 时 γ 为 $\mathbb{C}$ 中的直线, 可看成 $\mathbb{C}_\infty$ 中过 ∞ 点的圆周

$\mathbb{C}$ 中的圆周或直线都可以看成 $\mathbb{C}_\infty$ 中的圆周

(iii) 反过来设有圆周 $\gamma: |z-a|=R$. 设 z_1, z_2 为 γ 的对称点. $\left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = \frac{R}{R} = 1$

定理 1. 分式线性变换将圆周映为圆周, 且将对称点映为对称点.

$$\text{证. 设 } \gamma: \left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = k \quad (k>0) \quad \text{设 } w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

$$\therefore z = f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

$$\therefore \left| \frac{(cz+d)w - (az+b)}{(cz+d)w - (az+b)} \right| = k$$

$$\text{ii) 若 } (z_1+d) \neq 0, (z_2+d) \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{w-f(z_1)}{w-f(z_2)} \right| = k. \quad \text{圆周} \checkmark \text{ 对称点}$$

No.

Date. / /

(2) $cz_1 + d = 0$. 则 $cz_2 + d \neq 0$ 且 $az_1 + b \neq 0$

$$\Rightarrow w = f(z_1) = k''$$

$f(z)$ 为圆周. $f(z_1) = \infty$ 和 $f(z_2)$ (圆心) 关于 $f(z)$ 对称.

注意 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 最多只有两个不动点. 除非 $f = id$.

故若两个分式线性变换 f_1, f_2 同时将三个不同点 z_1, z_2, z_3 映为

w_1, w_2, w_3 . 则 $f_1 = f_2$

给定三个不同点 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ 将 z_1, z_2, z_3 分别映为 $0, 1, \infty$ 的分式线性变换为

$$f^x(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3} \frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}$$

若 $z_1 = \infty$. 则在上式中令 $z_1 \rightarrow \infty$ 即得 如 $z_1 = \infty$. $z \rightarrow \frac{z_3-z_2}{z-z_4}$

定义: 给定 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$. 定义 z_1, z_2, z_3, z_4 的交比为 $(z_1, z_2, z_3, z_4) = f^x(z_1)$

$$= \frac{z_1-z_2}{z_1-z_4} \frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}$$

定理 2. 分式线性变换保持交比不变. 即 $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4)$

证 $f^x \circ f^{-1}$ 将 w_1, w_2, w_3, w_4 映为 $0, 1, \infty$

$$\Rightarrow (w_1, w_2, w_3, w_4) = f^x \circ f^{-1}(w_1) = f^x(z_1)$$

$$= (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

$$\begin{array}{ccc} z_1, z_2, z_3, z_4 & \xrightarrow{f^x} & 0, 1, \infty \\ \downarrow f^{-1} & & \\ w_1, w_2, w_3, w_4 & & \end{array}$$

(1) 将上半平面 $\mathbb{H}$ 映为单位圆盘

$$\text{取 } a \in \mathbb{H}. f(a) = 0 \quad f(\bar{a}) = \infty \quad \therefore f(z) = \lambda \frac{z-a}{z-\bar{a}} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$1 = f(1) = \lambda \frac{1-a}{1-\bar{a}} = |\lambda| \quad \lambda = e^{i\theta} \quad f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

(2) 将 $|z| < 1$ 映成 $|w| < 1$

f 将 $|z|=1$ 映成 $|w|=1$

$$\text{设 } |a| < 1 \quad f(a) = 0 \quad f\left(\frac{1}{\bar{a}}\right) = \infty$$

$$f(z) = \lambda' \frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}} = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

$$1 = |f(1)| = \lambda \frac{1-a}{1-\bar{a}} = |\lambda| \Rightarrow \lambda = e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

B7. 将 H (上半平面) 映到 H .

设 $f: H \rightarrow H$ 分式线性变换 则 f 把实轴映为实轴

任取 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$ $w_i = f(z_i) \in \mathbb{R}$.

知若 $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 则 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\therefore \bar{w} = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \quad w - \bar{w} = \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{(cz+d)^2}$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) \quad \operatorname{Im}(z) > 0$$

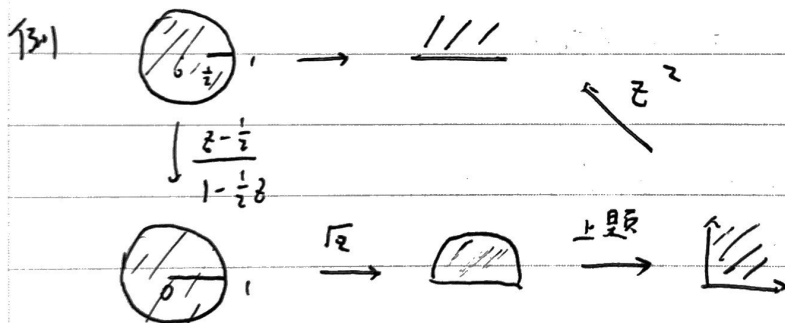
$$\operatorname{Im}(w) > 0 \Leftrightarrow ad - bc > 0$$

例. 将 $\{z \mid |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ 映为第一象限的共形映射 (1对1全纯)

将 $-i, 0, 1$ 映为 $0, 1, \infty$ 的分式线性变换 $f(z) = \frac{z+i}{1-z}$

$\therefore f(i) = i$ 所以 $f(r)$ 为过 0 和 i 的直线 (保圆)

(或者在 -1 处保角垂直)



例. 将 $C_1: |z|=1$ 和 $C_2: |z-1|=\frac{5}{2}$ 所围内部区域共形地映为圆环 $1 < |w| < R$, 并求 R

设 $f: D \rightarrow \tilde{D}$ 满足条件, 则 $f^{-1}: \tilde{D} \rightarrow D$ 也是共形的

由于 $0, \infty$ 为 $|w|=1, |w|=R$ 的共同对称点

则 $z_1 = f(0), z_2 = f(\infty)$ 同时关于 C_1, C_2 对称

则 $z_1, z_2, 0$ 共线, 且 $z_1, z_2, 1$ 共线, $\Rightarrow z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 z_2 = 1 \\ (z_1 - 1)(z_2 - 1) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{1}{4} \\ z_2 = -4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} z_1 = -4 \\ z_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$f(z) = \lambda \frac{z+\frac{1}{4}}{z+4}$ 此时 $f(z)$ 将 C_1 映为 $|w|=1$

No.

Date. / /

$$1 = |f(z)| = \left| \lambda \frac{z}{5} \right| = \frac{|\lambda|}{5} \Rightarrow \lambda = 5 e^{i\theta}$$

由于 f 将 C_2 映为 $|w|=R$. $\therefore R = |f(\frac{7}{2})| = 2$

$$\text{若 } \begin{cases} z_1 = -4 \\ z_2 = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \tilde{f}(z) = \lambda \frac{z+4}{z+\frac{1}{4}}$$

$$|w|=1 \Rightarrow 1 = |\tilde{f}(\frac{7}{2})| \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} e^{i\theta}$$

$$R = |\tilde{f}(z)| = \frac{1}{2} \frac{1+4}{1+\frac{1}{4}} = 2$$

ch3. Cauchy 积分理论

§3.1. 复变函数的积分

设 $\gamma, z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$ 为可求长曲线.

设 f 为定义在 γ 上的复变函数.

若 Riemann 和 $\sum_k f(z_k) (z_k - z_{k-1})$

当分割 $\|T\| \rightarrow 0$ 时总有相同的极限, 则称 f 在 γ 上可积, $\int_\gamma f(z) dz$

注. 若 Riemann 和 $\sum_k f(z_k) |z_k - z_{k-1}|$ 有极限.

定理 1. 设 $f(z) = u + iv$ 在可求长曲线 γ 上连续, 则 $\int_\gamma f(z) dz$ 存在, 且

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma u dx - v dy + i \int_\gamma v dx + u dy$$

证. $z = z(t) = x(t) + iy(t)$

$$z_k = z(t_k) = x_k + iy_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$$

$$z_k = \xi_k + i \eta_k$$

$$\text{则 } \sum_k f(z_k) (z_k - z_{k-1}) = \sum_k (u(\xi_k, \eta_k) + i v(\xi_k, \eta_k)) (\Delta x_k + i \Delta y_k)$$

$$= \sum_k (u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k) + i \sum_k (v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k)$$

$$= \int_\gamma u dx - v dy + i \int_\gamma v dx + u dy$$

定理 2. 若 $z = z(t)$ 是光滑曲线 γ , f 在 γ 上连续, 则

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

证. 由定理1. 设 $z(t) = x(t) + iy(t)$

$$\int_{\gamma} u dx - v dy = \int_a^b [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] dt$$

$$\int_{\gamma} v dx + u dy = \int_a^b [v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)] dt$$

(1) $\gamma = (z) \times i$ 则

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (u + iv) (x'(t) + iy'(t)) dt = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

例1. 设 γ 为可求长曲线 $z = \gamma(t)$, $a \leq t \leq b$ 求 $\int_{\gamma} dz$, $\int_{\gamma} z dz$

$$\int_{\gamma} dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (z_n - z_0) = \gamma(b) - \gamma(a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z dz &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n z_k (z_k - z_{k-1}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n z_{k-1} (z_k - z_{k-1}) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{z_k + z_{k-1}}{2} (z_k - z_{k-1}) = \frac{1}{2} (z_n^2 - z_0^2) = \frac{1}{2} (\gamma(b)^2 - \gamma(a)^2) \end{aligned}$$

若 γ 光滑曲线 $\int_{\gamma} dz = \int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a)$

$$\int_{\gamma} z dz = \int_a^b \gamma(t) \gamma'(t) dt = \frac{1}{2} \gamma(t)^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2} (\gamma(b)^2 - \gamma(a)^2)$$

$z = \gamma(t)$ $t \in [a, b]$

命题. 设 D 区域 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 连续, 且有原函数 $F(z)$. ($F'(z) = f(z)$). γ 为 D 中

分段光滑曲线, 则 $\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

证 $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = F(\gamma(t)) \Big|_a^b$

定理. 设 f, g 在可求长曲线 γ 上连续, 则

(1) $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$. γ^- 是与 γ 反向的曲线

(2) $\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_{\gamma} f dz + \beta \int_{\gamma} g dz$

(3) $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$

(4) (绝对值不等式) $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$

(5). 若 $m = \sup_{z \in \gamma} |f(z)|$ $L = |\gamma|$ $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq mL$

证. (4) $|\sum_{k=1}^n f(z_k) (z_k - z_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n |f(z_k)| |z_k - z_{k-1}|$

No.

Date.

例2. $\int_r \frac{dz}{(z-a)^n}$ $a \in \mathbb{C}$ $r: |z-a|=r$
 $z-a = re^{i\theta}$ $\text{即 } z(\theta) = a + re^{i\theta}$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$I = \int_r \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} i d\theta}{(re^{i\theta})^n} = r^{1-n} i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta$$

$$n=1 \quad I = 2\pi i$$

$$n \neq 1 \quad I = r^{1-n} i \left. \frac{1}{i(1-n)} e^{i(1-n)\theta} \right|_0^{2\pi} = 0$$

例3. 计算 $I = \int_r \frac{dz}{z}$ 

$$\int_{r_1} \frac{dz}{z} = \int_{\pi/2}^0 \frac{e^{i\theta} i d\theta}{e^{-i\theta}} = \int_{\pi/2}^0 e^{2i\theta} i d\theta = \frac{1}{2} e^{2i\theta} \Big|_{\pi/2}^0 = \frac{1}{2} (1 + i) = 1$$

$$\text{或 } \int_{r_1} \frac{dz}{z} = \int_{r_1} \frac{z dz}{|z|^2} = \int_{r_1} z dz = \frac{1}{2} (1 - i^2) = 1$$

$$r_2: r(t) = t \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$\int_{r_2} \frac{dz}{z} = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \log 2$$

$$\int_{r_3} \frac{dz}{z} = \int_2^1 \frac{iy}{-iy} = \log 2$$

例4. $S = \frac{1}{2i} \int_r \bar{z} dz$

$$= \frac{1}{2i} \int_r (x-iy)(dx+idy)$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\int_r (x dx + y dy) + i \int_r (-y dx + x dy) \right]$$

$$\stackrel{\text{Green}}{=} \frac{1}{2i} \left[\iint_S 2i dx \wedge dy \right] = S$$

12. f 在 $\overline{D(1,1)}$ 上连续. 且 $\lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) = A$. $\lim_{r \rightarrow 0} \int_r f(z) dz = i\alpha A$ 

解. 设 $(z-a) f(z) = A + \varphi(z)$ $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = 0$

$$f(z) = \frac{A}{z-a} + \frac{\varphi(z)}{z-a}$$

$$\int_r f(z) dz = \int_r \frac{A}{z-a} dz + \int_r \frac{\varphi(z)}{z-a} dz$$

$$\int_r \frac{A}{z-a} dz = \int_{\beta}^{a+\beta} \frac{A re^{i\theta} i d\theta}{re^{i\theta}} = i\alpha A$$

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{z-z_0} dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma} |\varphi(z)| \cdot \frac{1}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi \sup_{z \in \gamma} |\varphi(z)| \quad (r \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = i\alpha A.$$

§3.2. Cauchy. 积分定理

设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 为区域 f 全纯 γ 为 D 中的可求长简单闭曲线. 且 γ 的内部包含在 D 中. 如果 f 连续

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u+iv)(dx+idy) = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx) \\ &\stackrel{\text{Green}}{=} \iint_S (-u_y - v_x) dx dy + i \iint_S (-v_y + u_x) dx dy = 0 \end{aligned}$$

定理 1. (Cauchy) 设 D 为区域 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯. γ 为 D 中可求长简单闭曲线. 且 $\text{int}(\gamma) \subset D$

$$\text{则 } \int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

证. 第一步. 当 γ 为三角形时结论成立 (Goursat)



记 $\gamma^{(0)} = \gamma$. 用各边中点. 将三角形四等分. 边界为 $\gamma_i^{(1)}$ ($1 \leq i \leq 4$)

$$\left| \int_{\gamma^{(0)}} f(z) dz \right| = \left| \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i^{(1)}} f(z) dz \right| \leq 4 \max_{1 \leq i \leq 4} \left| \int_{\gamma_i^{(1)}} f(z) dz \right|$$

$$\text{故存在 } \gamma_i^{(1)} \text{ s.t. } \left| \int_{\gamma_i^{(1)}} f(z) dz \right| \leq \frac{1}{4} \left| \int_{\gamma^{(0)}} f(z) dz \right| \quad \text{记 } \gamma_i^{(1)} = \gamma^{(1)}$$

以此类推 $\gamma^{(n)}$ 用 Δ_n 表示. $\gamma^{(n)}$ 所围成的三角形则

$$(1) \quad \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots$$

$$(2) \quad \text{diam } \Delta_n \rightarrow 0$$

$$(3) \quad |\gamma^{(n)}| = \frac{1}{2^n} L \quad (4) \quad \left| \int_{\gamma^{(0)}} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\gamma^{(n)}} f(z) dz \right|$$

由闭集套定理 $\exists z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. $z_0 \in D$. f 在 z_0 全纯.

$$\therefore f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \varphi(z)(z-z_0) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = 0$$

$$\int_{\gamma^{(n)}} f(z) dz = \int_{\gamma^{(n)}} f(z_0) dz + \int_{\gamma^{(n)}} f'(z_0)(z-z_0) dz + \int_{\gamma^{(n)}} \varphi(z)(z-z_0) dz$$

$$\left| \int_{\gamma^{(n)}} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma^{(n)}} |\varphi(z)|(z-z_0)| dz| \leq \sup_{z \in \gamma^{(n)}} |\varphi(z)| \cdot |\gamma^{(n)}| \cdot |\gamma^{(n)}| \leq \frac{L^2}{4^n} \sup_{z \in \gamma^{(n)}} |\varphi(z)|$$

$$\left| \int_{\gamma^{(0)}} f(z) dz \right| \leq L^2 \sup_{z \in \gamma^{(n)}} |\varphi(z)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma^{(0)}} f(z) dz = 0$$

第三步. 证明引理. 对 $\forall \varepsilon > 0$. $\exists$ 端点在 γ 上的折线 P . s.t.

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

由 ∂D 闭. r 紧. 致果 故 $d(\gamma, \partial D) = 2\rho > 0$

令 $G = \{z \in D \mid d(z, \gamma) < \rho\}$ 则 $\gamma \subset G \subset \bar{G} \subset D$

$$|L| = |\gamma|$$

由于 f 在 $\bar{G}$ 上一致连续. $\exists \delta > 0$. $z_1, z_2 \in \bar{G}$ 且 $|z_1 - z_2| < \delta$. 则 $|f(z_1) - f(z_2)| < \frac{\varepsilon}{2L}$

取 $\eta = \min(\rho, \delta)$ 在 γ 上依次取点 $z_0 \dots z_n$. s.t.

$|z_{k-1} - z_k| < \eta$ 连接 z_{k-1}, z_k . 得到折线 P .

易见 $P \subset G$. 令 $r_k = \overline{z_{k-1} z_k}$ $p_k = \overline{z_{k-1} z_k}$ (线段).

$$\begin{aligned} & \left| \int_{r_k} f(z) dz - \int_{p_k} f(z) dz \right| \\ &= \left| \int_{r_k} f(z) dz - \int_{r_k} f(z_{k-1}) dz + \int_{r_k} f(z) dz - \int_{p_k} f(z_{k-1}) dz \right| \end{aligned}$$

$$\leq \int_{r_k} |f(z) - f(z_{k-1})| |dz| + \int_{p_k} |f(z) - f(z_{k-1})| |dz|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2L} (|r_k| + |p_k|) \leq \varepsilon \frac{|r_k|}{L}$$

$$\therefore \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^n \varepsilon \frac{|r_k|}{L} = \varepsilon.$$

定理 2. 设 D 或 D 为可求长简单闭曲线 γ 的内部. f 在 D 中全纯且在 $\bar{D}$ 中连续. ($f \in H(D) \cap C(\bar{D})$). $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

证. 对 D 为单位圆盘给出证明.

设 $0 < r < 1$. $r, |z| = re^{i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

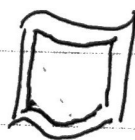
$$\text{则: } 0 = \int_{r_1} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) re^{i\theta} i d\theta$$

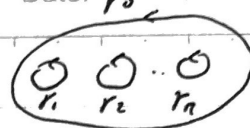
$$\left| \int_{r_1} f(z) dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{i\theta} i d\theta \right|$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} (f(re^{i\theta}) - f(re^{i0})) e^{i\theta} i d\theta \right|$$

$$\leq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(re^{i0})| d\theta \rightarrow 0 (r \rightarrow 1) \quad (\text{一致连续})$$

一般情形





定理3. 如图所示, D 的边界由 $r_0, r_1, \dots, r_n$ 组成

设 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$ 且 $\gamma = r_0 \cup r_1 \cup \dots \cup r_n$ 则

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{即} \quad \int_{r_0} f(z) dz = - \sum_{k=1}^n \int_{r_k} f(z) dz$$

例. 设 γ 为可求长简单闭曲线, $a \notin \gamma$. 求 $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$

(1) a 在 γ 的外部. 则 $f(z) = \frac{1}{z-a}$ 在 $\text{int}(\gamma)$ 中全纯.

由 Cauchy 积分定理 $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 0$.

(2) $a \in \text{int}(\gamma)$. 取 $\varepsilon > 0$. 设 $B(a, \varepsilon) \subset \text{int}(\gamma)$

$$\text{由定理3, } \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

例. $\int_{|z|=r} \frac{1 dz}{z-a}$ $|a| < r$

$$z = r e^{i\theta} \quad dz = r e^{i\theta} i d\theta \quad |dz| = r d\theta = \frac{r}{i z} dz$$

$$I = \int_{|z|=r} \frac{r dz}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) i z} = \int_{|z|=r} \frac{-ir dz}{(z-a)(r^2 - a\bar{z})}$$

$$= \int_{|z|=r} \frac{(-i) \frac{r}{r^2 - |a|^2}}{z-a} dz + \int_{|z|=r} \frac{(-i) \frac{\bar{a} r}{r^2 - |a|^2}}{r^2 - a\bar{z}} dz = \frac{2\pi r}{r^2 - |a|^2}$$

103. 4. 设 $0 < r < R$. f 在 $B(0, R)$ 中全纯. 证明

$$(1) f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r e^{i\theta}) d\theta$$

$$(2) f(0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z|<r} f(z) dx dy$$

Cauchy 积分

$$\text{证. (1) } f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(r e^{i\theta})}{r e^{i\theta}} r e^{i\theta} i d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r e^{i\theta}) d\theta$$

$$(2) \text{ 由 (1) } \int_0^r f(\rho) \rho d\rho = \int_0^r \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r e^{i\theta}) d\theta \right) \rho d\rho$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} r^2 f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|<r} f(z) dx dy$$

$$\Rightarrow f(0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z|<r} f(z) dx dy$$

5. 设 u 为 $B(0, R)$ 中的调和函数 $0 < r < R$ 证明 $u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta$

证明 $B(0, R)$ 单连通. u 存在共轭调和函数 v .

$f(z) = u + iv$ 全纯 在上题中而取实部即可.

§ 3.3. 全纯函数的原函数

定理 1. 设 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 连续. 如果对 D 中任意可求长简单闭曲线 γ .

$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ 则 $F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$ 是 $f(z)$ 原函数

即 $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in D$.

证. 条件保证良定

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, B(a, \delta) \subset D$, 且 $|z - a| < \delta$ 时 $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$.

$$\left| \frac{F(z) - F(a)}{z - a} - f(a) \right| = \left| \frac{1}{z - a} \int_{\gamma} f(z) dz - \frac{1}{z - a} \int_{\gamma} f(a) dz \right|$$

$$\leq \frac{1}{|z - a|} \int_{\gamma} |f(z) - f(a)| dz < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow F'(a) = f(a)$$

推论 2. D 为单连通域 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯 则 f 有原函数.

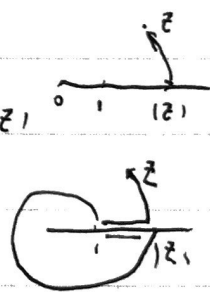
注. 若 D 为多连通区域 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯 $F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$ 也可能是多值函数

如 $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$. 取 $z_0 = 1$

$$(1) \text{ 如图 } \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = \int_1^{|z|} \frac{dx}{x} + \int_0^{\arg z} \frac{re^{i\theta} i d\theta}{re^{i\theta}} = \log |z| + i \arg |z|$$

$$(2) \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz = \log |z| + i \arg z + 2\pi i$$

$$\text{故 } \int_{z_0}^z \frac{1}{z} dz = \text{Log } z$$



单连通

定理. 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为区域 且 $0 \notin D$. 则存在 D 上的全纯函数 $F(z)$, s.t. $e^{F(z)} = z$

$\Rightarrow F(z)$ 为 $\log z$ 的一个单值分支

$$\text{任取 } z_0 \in D. \text{ 令 } F(z) = \int_{z_0}^z \frac{1}{z} dz + c_0$$

由 D 单连通 且 $0 \notin D$, $F(z)$ well-defined $F'(z) = \frac{1}{z}$

$$\frac{d}{dz} (ze^{-F(z)}) = e^{-F(z)} + z e^{-F(z)} \cdot (-F'(z)) = 0$$

$$\text{故 } ze^{-F(z)} = \text{Const} = z_0 e^{-F(z_0)} = z_0 e^{-C_0} = 1 \Rightarrow e^{F(z)} = z$$

§3.4 Cauchy 积分公式

定理1. (Cauchy 积分公式) 设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的内部.

$$f \in H(D) \cap C(\bar{D}) \quad \text{则对 } \forall z \in D, \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

证. 对 $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$. 对 $\forall B(z, \delta) \subset D$. 且当 $|\zeta - z| < \delta$ 时

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

$$\text{由 Cauchy 积分定理} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$|f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi\delta = \varepsilon. \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ 即可}$$

注. D 由若干条闭曲线围成的区域时. 结论也成立

推广

定理2. 设 D 是由可求长闭曲线 γ 围成的区域 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$ 则 f 在 D 上

$$\text{有任意阶导数且对 } \forall z \in D, \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

证. 用归纳法. $n=0$ 时定理1. 假设对 $n-1$ 时成立.

$$\forall z \in D. \forall h \in \mathbb{C} \text{ 且 } z+h \in D.$$

$$\frac{1}{h} (f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{h} \left(\frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \right) d\zeta$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(\zeta - z - h)^i (\zeta - z)^{n-1-i}} d\zeta$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

定理3. D 是由多条可求长简单闭曲线围成的区域. 定理2 仍然成立

推论4. 若 f 为域 D 上的全纯函数. 则 f 在 D 上有任意阶导数. 特别地. 全纯函数的导函数也是全纯函数

证. $\forall z_0 \in D$. 取 $\delta > 0$. 对 $\forall B(z_0, \delta) \subset D$.

取 $r = \frac{1}{2}\delta$. 由定理2 可得

No.

Date. / /

注. 设 γ 为可求长简单曲线 (闭). 设 $f(z)$ 在 γ 上连续, 则函数 (Cauchy 型积分)

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{在 } C \setminus \gamma \text{ 上连续, 全纯, 且}$$

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (n \geq 1)$$

(证明类似定理 1.2.)

① (无界区域的 Cauchy 积分公式)

设 D 为可求长简单闭曲线 γ 的外部. f 在 D 上全纯且延拓到边界. 若 $f_{\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 存在有限, 则 $f(z) = f_{\infty} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

证. 取 $R > 0$, 设 $|z - z_1| = R$ 包含 γ .

$$\text{由定理 3} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_1 - z| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_1 - z| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f_{\infty} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_1 - z| = R} \frac{f(\zeta) - f_{\infty}}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|z_1 - z| = R} |f(\zeta) - f_{\infty}| \cdot \frac{2\pi R}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty)$$

$$\text{例 1. } \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z^2+16)}$$

$$= \frac{1}{16} \int_{|z|=2} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+16} \right) dz = 0 + 0 = 0$$

$$\text{或 } I = \int_{|z|=2} \frac{\frac{1}{z^2+16}}{(z-0)^2} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{z^2+16} \right)' \Big|_{z=0} = 0$$

$$\text{例 2. } I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^3-1)(z+4)^2}$$

$$\text{取 } R \gg 1, \int_{|z|=R} \frac{dz}{(z^3-1)(z+4)^2} = 2\pi i \left(\frac{1}{z^3-1} \right)' \Big|_{z=-4} = -\frac{32\pi i}{1323}$$

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{dz}{(z^3-1)(z+4)^2} \right| = O\left(\frac{1}{R^4}\right) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty)$$

$$\Rightarrow I = \frac{32\pi i}{1323}$$

§3.5 Cauchy 积分公式的应用

定理 1. (Cauchy 不等式) 设 f 在 $B(a, R)$ 中全纯, 且对任意 $z \in B(a, R)$ $|f(z)| \leq M$

$$\text{则 } |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M}{R^n}$$

证. $0 < r < R$. f 在 $\overline{B(0, r)}$ 中全纯

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (n \geq 1)$$

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n! M}{r^n} \quad \text{令 } r \rightarrow R \text{ 即得}$$

定理 2 (Liouville), 有界整函数必为常数

证. 设 $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall a \in \mathbb{C} \quad R > 0$

$$B(a, R) \text{ 中用定理 1. } |f'(a)| = \frac{M}{R} \quad R \rightarrow \infty \Rightarrow f'(a) = 0 \Rightarrow \text{常数}$$

定理 3 (代数基本定理). 任意非常数的复系数多项式 $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (a_n \neq 0)$ 在 $\mathbb{C}$ 中有零点.

证. 反证法. 假设 $p(z)$ 无零点, 则 $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ 为整函数

$$\text{由 } \lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 0 \Rightarrow \exists R > 0 \quad \text{s.t. } |z| > R \text{ 时, } |f(z)| \leq 1$$

由 $f(z)$ 在 $|z| \leq R$ 中连续 $\exists M > 0 \quad |f(z)| \leq M \quad \text{有界整} \Rightarrow f(z) = p(z) \text{ 常数} \times$

定理4 (Morera) 如果 f 是域 D 上的连续函数, 且沿着 D 中任意可求长简单闭曲线的积分为零, 则 f 在 D 上全纯

证. 令 $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ $F(z)$ well-defined 全纯.

且 $F'(z) = f(z) \Rightarrow f(z)$ 全纯.

§3.6. Pompeiu 公式

设 $f = u + iv$ $u, v \in C^1(D)$

$z = x + iy$, $dz = dx + i dy$ $d\bar{z} = dx - i dy$

定义 外积 $dz \wedge dz = 0$ $d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0$ $d\bar{z} \wedge dz = -dz \wedge d\bar{z}$

$$dz \wedge d\bar{z} = -2i dx \wedge dy$$

外微分运算 $df(z) = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$

$$\begin{aligned} d(f(z) dz + g(z) d\bar{z}) &= df(z) \wedge dz + dg(z) \wedge d\bar{z} \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial z} \right) dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

定理1. (Green 公式) 设 D 是由若干条可求长简单闭曲线围成的区域

$$w = f(z) dz + g(z) d\bar{z} \quad f, g \in C^1(\bar{D})$$

$$\text{则 } \int_{\partial D} w = \int_D dw.$$

$$\text{即 } \int_{\partial D} f(z) dz + g(z) d\bar{z} = \int_D \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}$$

证. 利用实部虚部直接运算 + 实的 Green 公式

定理2. (Pompeiu) 设 D 是由若干条可求长简单闭曲线围成的区域, 如果

$f \in C^1(\bar{D})$ 则对 $\forall z \in D$, 有 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta$

证. 取 $\eta > 0$ s.t. $B(z, \eta) \subset D$. 令 $G_\eta = D \setminus \overline{B(z, \eta)}$

记 $w = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ G_η 上 - Pf 微分形式

$$dw = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta$$

$$\text{由定理1. } \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial B_\eta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{G_\eta} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta \quad (*)$$

$$\int_{\partial B_\eta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial B_\eta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\partial B_\eta} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta \rightarrow 2\pi i f(z) \quad (\eta \rightarrow 0)$$

由 $\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}$ 连续, 且 $\exists M > 0$ s.t. $|\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}| \leq M$ on $\bar{B}_\eta$

$$|\iint_{B_\eta} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta| \leq M \iint_{B_\eta} \frac{1}{|\zeta - z|} (2r) dx dy = 2M \iint_{B_\eta} \frac{1}{r} r dr d\theta = 4M\pi\eta \rightarrow 0$$

$$\therefore \lim_{\eta \rightarrow 0} \iint_{B_\eta} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta$$

则 $\lambda(x) \equiv 0$ 即 $\bar{\eta}$.

P117. 8 (Schwarz 积分公式)

设 $f = u + iv$ 在 $B(0, R)$ 中全纯 $\overline{B(0, R)}$ 连续, 则对 $\forall z \in B(0, R)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} u(Re^{i\theta}) d\theta + i v(0)$$

证. Cauchy 积分公式 $\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{zf(\zeta)}{\zeta - z} d\theta \quad (1)$

$$\because |z| < R, \quad R^2/|z| > R \Rightarrow \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \frac{R^2}{\bar{z}}} d\zeta = 0$$

$$\Rightarrow \int_{|\zeta|=R} \frac{\bar{z} f(\zeta)}{\zeta - \bar{z} - \frac{R^2}{\bar{\zeta}}} d\zeta = 0 \quad \text{取共轭} \quad \int_{|\zeta|=R} \frac{z \overline{f(\zeta)}}{\zeta - z} d\theta = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) + (2), \quad f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{zf(\zeta) + z \overline{f(\zeta)}}{\zeta - z} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta - z} u(\zeta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} i \cdot v(\zeta) d\theta. \end{aligned}$$

最大模原理和 Schwarz 引理

引理 (平均值公式) 设 f 在 $|z - a| < R$ 中全纯, 则对 $\forall 0 < r < R$, $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$

证. $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} re^{i\theta} i d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$

定理 1. (最大模原理). 设 $f(z)$ 在区域 D 上全纯且不为常数, 则 $|f(z)|$ 在 D 中取不到最大值

证. 设 $M = \sup_{z \in D} |f(z)|$ 若 $M = +\infty$, 显然成立.

若 $m=0$, 则 $f(z) \equiv 0$ 矛盾

断言 设 $a \in D$, 且 $|f(a)| = m$. 若 $\delta > 0$ 且 $B(a, \delta) \subset D$.

则当 $z \in B(a, \delta)$ 时 $|f(z)| = m$.

$$\forall 0 < r < \delta, \quad f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

$$m = |f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta \Rightarrow \int_0^{2\pi} (m - |f(a + re^{i\theta})|) d\theta \leq 0$$

而 $m - |f(a + re^{i\theta})| \geq 0$ 且关于 θ 连续 $\Rightarrow m = |f(a + re^{i\theta})|$

证法1 (凑圆法) 假设 $\exists a \in D$ s.t. $|f(a)| = m$.

$\forall b \in D$, 取简单曲线 γ 连接 a 和 b

$$\text{设 } \rho = d(\gamma, \partial D) > 0$$

在 γ 上依次取 $z_0 = a, z_1, \dots, z_n = b$ s.t. $|z_k - z_{k-1}| < \rho$

$$\text{可得 } |f(a)| = |f(z_1)| = \dots = |f(z_n)| = |f(b)| = m$$

$$\text{证法2 } D_1 = \{z \in D, |f(z)| = m\}, \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset$$

$$D_2 = \{z \in D, |f(z)| < m\}, \quad D = D_1 \cup D_2$$

由断言 D_1 为开集, D_2 显然为开集 与连通性矛盾

故 $D_1 = \emptyset$ 或 $D_2 = \emptyset$

推论 设 $f(z)$ 在有界区域 D 上全纯, 在 $\bar{D}$ 上连续, 且不为常数

则 $|f(z)|$ 的最大值只能在边界取到.

证. 由紧集, f 在 $\bar{D}$ 上连续, 故 $|f(z)|$ 在 $\bar{D}$ 上有最大值. $\checkmark$

注. D 为无界区域 不成立

$$f(z) = e^{e^z} \quad z \in D = \{z, |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\}$$

定理 2. (Schwarz) 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 中全纯 $f(0) = 0, |f'(0)| \leq 1$. 则当 $|z| < 1$ 时 $|f(z)| \leq |z|$

且 $|f'(0)| \leq 1$

进一步, 若 $\exists z_0 \in D$ s.t. $|f(z_0)| = |z_0|$ 或 $|f'(0)| = 1$, 则 $f(z) = e^{i\theta} z, \theta \in \mathbb{R}$

$$\text{证. 构造 } \varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases} \quad (|z| < 1)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0) \Rightarrow \varphi \text{ 连续. 下证 } \varphi \text{ 全纯.}$$

设 γ 为 $|z| < 1$ 中可求长简单闭曲线

① γ 的内部不含 0. 此时经过 0 $\stackrel{\text{Cauchy}}{=} \int_{\gamma} f(z) dz = 0$

② γ 的内部包含 0. 取 $\varepsilon > 0$. s.t.

$B(0, \varepsilon) \subset \text{int}(\gamma)$ 由 Cauchy

$$\int_{\gamma} \varphi(z) dz = \int_{\gamma} \varphi(z) dz \quad \left| \int_{|z|=\varepsilon} \varphi(z) dz \right| \leq \sup_{|z|=\varepsilon} |\varphi(z)| \cdot 2\pi\varepsilon \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \varphi(z) dz = 0$$

由 Morera 定理. $\varphi(z)$ 在 $|z| < 1$ 中全纯

由最大模原理 当 $|z| < r < 1$ 时.

$$|\varphi(z)| \leq \sup_{|z|=r} |\varphi(z)| = \sup_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$$

$$\text{令 } r \rightarrow 1^- \quad |z| < 1 \text{ 时 } |\varphi(z)| \leq 1$$

$$z \neq 0 \text{ 时 } \varphi(z) = \frac{f(z)}{z} \Rightarrow |f(z)| \leq |z|$$

$$z = 0 \text{ 时 } \varphi(0) = f'(0) \Rightarrow |f'(0)| \leq 1$$

若 $\exists z_0 \neq 0$. $|f(z_0)| = |z_0|$ 或 $|f'(0)| = 1$ 则 $|\varphi(z)| = 1$ 或 $|\varphi(0)| = 1$

由最大模原理 $\varphi(z) = e^{i\theta}$

例 1 用最大模原理证明代数基本定理

设 $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \quad (a_n \neq 0, n \geq 1)$

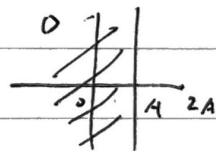
反证法 假设 $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. 令 $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ 为整函数

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |p(z)| = +\infty \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 0 \text{ 与最大模定理矛盾}$$

例 2 设 $f \in H(B(0,1))$ $f(0) = 0$ 并且 $\exists A > 0$ s.t. $|f(z)| \leq A, \forall z \in B(0,1)$

$$\text{证明 } |f(z)| \leq \frac{2A|z|}{1-|z|} \quad (|z| < 1)$$

证 构造单叶全纯映射 $D \rightarrow B(0,1)$ ($0 \rightarrow 0, 2A \rightarrow \infty$)



$$\text{令 } \varphi(z) = \frac{z}{z-2A}$$

$$B(0,1) \xrightarrow{f} D \xrightarrow{\varphi} B(0,1)$$

令 $g = \varphi \circ f \quad B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ 全纯

由 Schwarz 引理 $|g(z)| \leq |z| \quad \forall z \in B(0,1)$

$$g(z) = \frac{f(z)}{f(z)-2A} \Rightarrow f(z) = \frac{2A g(z)}{1-g(z)} \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{2A |g(z)|}{1-|g(z)|} \leq \frac{2A |z|}{1-|z|}$$

定义 设 $f: D \rightarrow D$ 单叶全纯 $f(0)=0$. 则称 f 为 D 上的一个全纯自同构.

D 上全纯自同构全体记为 $\text{Aut}(D)$

设 $|a| < 1$ 记 $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$

① $\varphi_a(0)=0$ $\varphi_a(0)=a$

② $\varphi_a \in \text{Aut}(B(0,1))$

③ $\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$ $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$

定理 3. $\text{Aut}(B(0,1)) = \left\{ f(z) = e^{i\theta} \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \mid a \in \mathbb{R}, |a| < 1 \right\}$

证. 只要证左右. 不妨设 $f(0)=0$ $|0| < 1$

令 $g = f \circ \varphi_a$ $B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ $g \in \text{Aut}(B(0,1))$

由 S-引理 $|g(z)| \leq |z|$ 同证 $|g^{-1}(z)| \leq |z|$

取 $w = g(z)$ 则 $|g(z)| \geq |z| \Rightarrow |g(z)| = |z|$

再由 S-引理 $g(z) = e^{i\theta} z$ $\theta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f = g \circ \varphi_a$

定理 (Schwarz - Pric) 设 $f: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ 全纯. $f(0)=b$

则 (1) $\forall z \in B(0,1)$ 有 $|\varphi_b \circ f(z)| \leq |\varphi_a(z)|$

(2) $\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2} \quad \forall z \in B(0,1)$

(3) 若 $\exists z_0 \neq 0$ 使得 (1) 或 (2) 中等式成立 则 $f \in \text{Aut}(B(0,1))$

证. 令 $g = \varphi_b \circ f \circ \varphi_a$

$$B(0,1) \xrightarrow{\varphi_a} B(0,1) \xrightarrow{f} B(0,1) \xrightarrow{\varphi_b} B(0,1)$$

则 $g(0)=0$ 由 S-引理

$|\varphi_b \circ f \circ \varphi_a(w)| \leq |w| \quad \forall |w| < 1$ 令 $w = \varphi_a(z)$

则 $|\varphi_b \circ f(z)| \leq |\varphi_a(z)| \quad \forall |z| < 1$

(2). 由 S-引理 $|\varphi_b \circ f \circ \varphi_a|'(0) \leq 1$ 即 $|\varphi_b'(b) f'(a) \varphi_a'(0)| \leq 1$

$\varphi_a'(0) = \frac{1-a^2}{(1-\bar{a}z)^2}$ $\varphi_a'(0) = 1-a^2$ $\varphi_a'(a) = \frac{-1}{1-|a|^2}$

$\frac{1}{1-|b|^2} |f'(a)| (1-|a|^2) \leq 1 \Rightarrow \frac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2} \leq \frac{1}{1-|a|^2}$

(3) 若等式成立 $g = \varphi_b \circ f \circ \varphi_a$ 为旋转 $\Rightarrow f \in \text{Aut}(B(0,1))$

例 $f: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ 全纯. 证明 $|f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 - |f(0)||z|}$

证. 由 S-p. $|\varphi_{f(0)} \circ f(z)| \leq |\varphi_0(z)| = |z|$

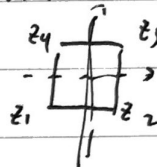
$$\begin{aligned} |f(z)| &= |\varphi_{f(0)} \circ \varphi_{f(0)}^{-1} \circ f(z)| \\ &= \left| \frac{f(z) - \overline{f(0)}}{1 - \overline{f(0)} f(z)} \right| \leq \frac{|f(z)| + |z|}{1 - |f(0)||f(z)|} \end{aligned}$$

例. $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$. M 是 $|f(z)|$ 在 $\bar{D}$ 上的最大值 m 是 $|f(z)|$ 在线段 $[z_1, z_2]$ 上的最大值. 证明 $|f(0)| \leq m^{\frac{1}{4}} M^{\frac{3}{4}}$

证. 令 $F(z) = f(z) \cdot f(\bar{z}_1) \cdot f(\bar{z}_2) \cdot f(\bar{z}_3) \in H(D) \cap C(\bar{D})$

$\forall z \in \partial D$. $z, i\bar{z}, i^2\bar{z}, i^3\bar{z}$ 至少有一个在 $[z_1, z_2]$ 上

$$\max_{z \in \partial D} |F(z)| \leq mM^3 \xrightarrow{\text{最大模}} |F(0)| \leq mM^3 \Rightarrow \text{结论}$$



例. 设 $p(z)$ 是 k 次多项式 $|z|=1$ 时 $|p(z)| \leq 1$. 证明 $|z| > 1$ 时 $|p(z)| \leq |z|^k$

证. 设 $p(z) = a_k z^k + \dots + a_0$

$$p\left(\frac{1}{z}\right) = a_k \frac{1}{z^k} + \dots + a_1 \frac{1}{z} + a_0$$

$$f(z) = z^k p\left(\frac{1}{z}\right) = a_k + a_{k-1} z + \dots + a_0 z^k$$

$$|z|=1 \text{ 时 } |f(z)| = |z|^k |p\left(\frac{1}{z}\right)| = 1$$

$$|z| < 1 \text{ 时 } |f(z)| \leq 1 \quad (\text{最大模})$$

$$\Rightarrow |p\left(\frac{1}{z}\right)| \leq \frac{1}{|z|^k}$$

Ch4. 全纯函数的 Taylor 展开及应用

§ 4.1. 函数列与函数项级数

定义 $K \subset \mathbb{C}$. 称函数列 $f_n: K \rightarrow \mathbb{C}$ 在 K 上一致收敛于 $f: K \rightarrow \mathbb{C}$. 如果对 $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N$. 当 $n > N$ 时. $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K$.

定理 1. (Weierstrass) 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为区域. $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯. 设 f_n 在 D 中内闭一致收敛于 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. (即 f_n 在 D 的每个紧致子集上一致收敛). 则

(1). f 在 D 上全纯

(2). $\forall k \geq 1, f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛于 $f^{(k)}(z)$

证. (1) 设 $z \in D$. 取 $r > 0$ s.t. $\overline{B(z, r)} \subset D$

设 γ 为 $B(z, r)$ 中任意可求长简单闭曲线. γ 为逆时针

故 f_n 在 γ 上一致收敛于 f . 则 $\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz$

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n, n \geq N$ 时 $|f_n - f| < \varepsilon$

$$|\int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz| \leq \int_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| |dz| < \varepsilon |\gamma|$$

由 Cauchy 定理 $\int_{\gamma} f_n(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$

由 Morera 定理 f 在 $B(z, r)$ 全纯.

$\Rightarrow f$ 在 D 中全纯

(1) 只需证 $k=1$ 即可. 首先证明.

$\forall z \in D, f_n'(z)$ 在 z 的某个邻域一致收敛到 $f'(z)$

设 $z_0 \in D$. 取 $\delta > 0$ s.t. $B(z_0, 2\delta) \subset D$

注意 $\forall z \in B(z_0, \delta) \subset B(z_0, 2\delta)$, 则 $|z - \zeta| \geq \delta$

$$|f_n'(z) - f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = 2\delta} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|\zeta - z| = 2\delta} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot 2\pi \cdot 2\delta \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

设 $K \subset D$ 为紧子集 $\forall \varepsilon \in K, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.t.

$f_n(z)$ 在 $B(z, \delta)$ 中一致收敛到 $f(z)$

$\{B(z, \delta), z \in K\}$ 为 K 的开覆盖. 故有有限子覆盖 $\{B(z_i, \delta_i), 1 \leq i \leq n\}$

易见 $f_n'(z)$ 在 $\bigcup_{i=1}^n B(z_i, \delta_i) \supset K$ 上一致收敛

定义 设 $z_n \in \mathbb{C} \quad n=1, 2, \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad S_n = z_1 + \dots + z_n$

定义 设 $f_n: K \rightarrow \mathbb{C}$ 称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 K 上一致收敛于 $f: K \rightarrow \mathbb{C}$

如果函数列 $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$ 在 K 上一致收敛于 f

易见 "Cauchy 准则" $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 K 上一致收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n, n \geq N$ 时

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon, \quad \forall p \geq 1, \quad \forall z \in K$$

(2) Weierstrass 判别法. 设 $|f_n(z)| \leq a_n \quad \forall n, \forall z$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 K 中一致收敛

(3) 连续性. 设 $f_n: K \rightarrow \mathbb{C}$ 连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 K 上

一致收敛于 $f(z)$. 则 $f(z)$ 连续

(4) 可积性. 设 $f_n: K \rightarrow \mathbb{C}$ 连续, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在可求长曲线 γ 上一致收敛于 $f(z)$

$$\text{则 } \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz$$

(5) 可导性. (Weierstrass)

设 $D \subset \mathbb{C}$ 区域, $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛于 $f(z)$.

1) $f(z)$ 在 D 中全纯.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛于 $f^{(k)}(z)$

$$\text{例. } \zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

$$z = x + iy \quad |n^z| = |e^{z \log n}| = |e^{(x+iy) \log n}| = n^x$$

$$\text{当 } x \geq x_0 > 1 \quad \left| \frac{1}{n^z} \right| \leq \frac{1}{n^{x_0}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}} < +\infty$$

Weierstrass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ 在 $\operatorname{Re} z > 1$ 中内闭一致收敛

$\Rightarrow \zeta(z)$ 在 $\operatorname{Re}(z) > 1$ 中全纯.

问. 紧致集上全纯函数是否一定可以被多项式逼近

否定 $K = \{z: |z|=1\}$, $f: K \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$

若 $\exists$ 多项式列 $p_n(z) \rightarrow f(z)$.

$$0 = \int_{|z|=1} p_n(z) dz \rightarrow \int_{|z|=1} f(z) dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \text{ 矛盾}$$

定理. (Runge 逼近定理). 设 $K \subset \mathbb{C}$ 为紧致集, f 在 K 上全纯. 若 K^c 连通.

则存在多项式 p_n 在 K 上一致收敛于 f

证. 参见 Stein

§ 4.2. 幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 称为幂级数. $a_n \in \mathbb{C}$. 下设 $z_0 = 0$

定理 1. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 为幂级数. 设 $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

则 (1) 当 $|z| < R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 绝对收敛

(2) 当 $|z| > R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 发散.

证. 不妨设 $0 < R < +\infty$.

(1) $|z| < R$. 取 $|z| < \rho < R$. $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho}$.

$$\exists N. n > N \text{ 时 } \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho} \Rightarrow |a_n z^n| < \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < +\infty.$$

(2) 设 $|z| > R$. 取 r . $|z| > r > R$. $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} > \frac{1}{r}$

$$\exists n_k. \text{ s.t. } \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{r} \Rightarrow |a_{n_k} z^{n_k}| > \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n_k} > 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n z^n \neq 0$$

定理 2 (Abel). 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 z_0 处收敛, 则它在 $\{z: |z| < |z_0|\}$ 中内闭一致收敛

证. 设 K 为 D 的紧子集. 取 $r < |z_0|$ s.t. $K \subset B(r)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \text{ 收敛} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^n = 0 \Rightarrow \exists M. \text{ s.t. } |a_n z_0^n| < M.$$

$$\forall z \in K. |a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$$

由 Weierstrass 判 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 K 中一致收敛

定理 3. 设幂级数收敛半径 R 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在收敛圆 $\{z: |z| < R\}$ 中全纯

证. 由定理 1 定理 2 知, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\{z: |z| < R\}$ 中内闭一致收敛

注. 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R$

$$\text{则 } f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

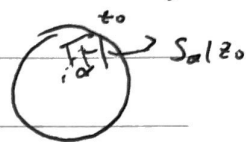
$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma a_n z^n dz$$

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, R=1$. 在 $|z|=1$ 上处处收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} z^n, R=1$. 在 $|z|=1$ 上处处发散

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \quad \theta \neq 0 \text{ 时收敛}$$

定义 设 g 为 $|z| < 1$ 上的函数 设 $|z|=1$. 若对 $\forall \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, z 在 $S_\alpha(z_0)$ 中趋于 z_0 时 $g(z)$ 有极限 l . 则称 g 在 z_0 处有非切向极限 l .



定理 4. (Abel 第二定理) 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R=1$. 且级数在 $z=1$ 处收敛 则 f 在 $z=1$ 处有非切向极限 $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

证 只需证. 对 $\forall 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $S_\alpha(1) \cap B(1, \delta)$ $\delta = \cos \alpha$ 一致收敛

$$\text{记 } \sigma_{n,p} = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}$$

$$\text{由 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ 收敛 } \forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N \text{ 时 } |\sigma_{n,p}| < \varepsilon, \forall p$$

$$a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \dots + a_{n+p} z^{n+p}$$

$$= \sigma_{n,1} z^{n+1} + (\sigma_{n,2} - \sigma_{n,1}) z^{n+2} + \dots + (\sigma_{n,p} - \sigma_{n,p-1}) z^{n+p}$$

$$= \sigma_{n,1} z^{n+1} (1-z) + \sigma_{n,2} z^{n+2} (1-z) + \dots + \sigma_{n,p-1} z^{n+p-1} (1-z) + \sigma_{n,p} z^{n+p}$$

$$= z^{n+1} (1-z) (\sigma_{n,1} + \dots + \sigma_{n,p-1} z^{p-2}) + \sigma_{n,p} z^{n+p}$$

当 $|z| < 1$, $n > N$ 时 对 $\forall p$ 有

$$|a_{n+1} z^{n+1} + \dots + a_{n+p} z^{n+p}| \leq (1-|z|) \varepsilon (1 + |z| + |z|^2 + \dots) + \varepsilon \\ = \varepsilon \left(1 + \frac{1-|z|^p}{1-|z|} \right)$$

取 $z \in S_\alpha(1) \cap B(1, \delta)$ 记 $|z|=r$, $1-|z|=p$

$$r^2 = 1 + p^2 - 2p \cos \theta, \quad 0 \leq \theta$$

$$\frac{1-|z|}{1-|z|^p} = \frac{p}{1-r^2} = \frac{p(1+r)}{1-r^2} \leq \frac{2p}{2p \cos \theta - p^2} = \frac{2}{2 \cos \theta - p} \leq \frac{2}{2 \cos \theta - \delta} \leq \frac{2}{\cos \alpha}$$

注 Abel 第二定理的逆不成立. 例 $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, (|z| < 1)$

$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$ 存在 但 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ 在 $z=1$ 处发散

$$\text{例. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = f(z), \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$$

$$\Rightarrow f(z) = -\log(1-z), \quad |z| < 1$$

已知 $z = e^{i\theta} \neq 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{i\theta})^n}{n} \stackrel{\text{Abel}}{=} \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} [-\log(1-z)] = -\log(1-e^{i\theta}) = -\log|1-e^{i\theta}| - i \arg(1-e^{i\theta})$$

$$= -\log(2 \sin \frac{\theta}{2}) + i \frac{\pi - \theta}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\log(2\sin \frac{\theta}{2}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}$$

P.49. 7.

若 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是 $B(0,1)$ 上的有界全纯函数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$

证 设 $|f(z)| \leq M$ 对 $\forall 0 < r < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \bar{z}^n \quad \bar{f}$$

$$M^2 \cdot 2\pi r^2 \int_{|z|=r} |f(z)|^2 dz = \int_{|z|=r} f(z) \cdot \bar{f}(z) dz = \int_{|z|=r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \bar{f}(z) dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z|=r} a_n z^n \bar{f}(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z|=r} a_n z^n \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \bar{z}^m dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{|z|=r} a_n z^n \bar{a}_m \bar{z}^m dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z|=r} |a_n|^2 r^{2n} dz = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \cdot r \cdot 2\pi r$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M^2$$

$$\Rightarrow \forall k \quad \sum_{n=0}^k |a_n|^2 r^{2n} \leq M^2 \Rightarrow \frac{k}{k} |a_k|^2 \leq M^2 \quad \forall k \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq M^2$$

§ 4.3. 全纯函数的 Taylor 展开

定理 1. 设 $f \in H(B(z_0, R))$ 则 f 可以在 $B(z_0, R)$ 中展开为幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \quad z \in B(z_0, R)$$

证. 任取定 $z \in B(z_0, R)$ 取 $\rho < R$ 使 $|z-z_0| < \rho$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz$$

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{\zeta-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{1}{\zeta-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} dz \quad (1)$$

$$\left| f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \right| \leq \sup_{\zeta \in \gamma_\rho} |f(\zeta)| \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{|z-z_0|}{\rho} \right)^n \quad \text{由 Weierstrass}$$

$$(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

定理 2. f 在域 D 中全纯 $\Leftrightarrow D$ 中每点的某个邻域中可展开成幂级数

解析

几个常见的 Taylor 级数

$$(1) f(z) = e^z \quad f^{(n)}(0) = 1 \quad (n \geq 0) \Rightarrow e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

$$(2) \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(3) \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad (|z| < 1)$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z)$$

$$(5) (1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad (|z| < 1)$$

定义 设 f 在 z_0 处全纯且不恒为 0. 如果 $f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(m-1)}(z_0) = 0$ 但 $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. 则称 z_0 为 f 的 m 阶零点.

定理 3. z_0 为 f 的 m 阶零点 $\Leftrightarrow f$ 在 z_0 的邻域中可表示为 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$

$g(z)$ 在 z_0 处全纯 $g(z_0) \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{证 } \Rightarrow f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^m \left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} (z - z_0) + \dots \right] \rightarrow g(z). \end{aligned}$$

$g(z)$ 在 z_0 处全纯 $g(z_0) \neq 0$

$\Leftarrow$ 直接算.

定理 4 (零点的孤立性) f 为域 D 上的全纯函数且不恒为 0. 则 f 在 D 中的零点是孤立的. 即若 $f(z_0) = 0$ 则存在 z_0 邻域 $B(z_0, \varepsilon)$ f 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 中无其他零点.

证. 假设 $m \geq 1$. 由定理 3

在 z_0 某个邻域 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$. 由 g 的连续性. 结论成立

(2) 如果 $\forall m \geq 0, f^{(m)}(z_0) = 0$. 由定理 1. 在 z_0 的 δ 邻域中

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = 0$$

$\forall \varepsilon > 0$. 取 r 连接 z_0 和 a . 记 $r = d(r, z_0) > 0$ 取 $\varepsilon = \min\{\delta, r\}$

在 r 上依次取 $z_1, z_2, \dots, z_n = a$ s.t. $|z_j - z_{j+1}| < \varepsilon$ 依次传递过去

定理 5. (唯一性定理). 设 f_1, f_2 为域 D 上的全纯函数. 如果 $\exists D$ 中点列 z_n

$$f_1(z_n) = f_2(z_n) \quad \text{且} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \in D \quad \text{则} \quad f_1 = f_2$$

证. 令 $g(z) = f_1(z) - f_2(z)$, 则 $g(z_n) = 0$

$$g(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(z_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(z_n) = 0$$

$$a \text{ 为 } g \text{ 的非孤立零点} \Rightarrow g(z) \equiv 0 \Rightarrow f_1 = f_2$$

例. 求出所有满足 $|f(z)| = 1 \quad \forall |z| = 1$ 的整函数 f .

证. 设 f 在 $|z| < 1$ 中的零点为 $z_1, \dots, z_n$, 重数为 $k_1, \dots, k_n$

$$\text{令 } g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^n \left(\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z} \right)^{k_j}} \quad g \text{ 在 } B(0,1) \text{ 中全纯, 无零点.}$$

$$|g(z)| = 1 \quad \forall |z| = 1$$

由最大模原理, 证 $|g(z)| \leq 1 \quad \forall |z| \leq 1$

对 $\frac{1}{g(z)}$ 用最大模 $|\frac{1}{g(z)}| \leq 1 \quad \forall |z| \leq 1$

$$\therefore |g(z)| = 1 \quad \forall |z| \leq 1 \Rightarrow g = \text{const} = e^{i\theta}$$

$$\therefore f(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \left(\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z} \right)^{k_j}$$

$$\text{由 } f(z) \text{ 整函数} \Rightarrow g_j = 0 \Rightarrow f(z) = e^{i\theta} z^n$$

P. 56.6 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, R > 0, 0 < r < R, A(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$ 证明

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad n \geq 1$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (1)$$

$$n \geq 1 \text{ 时 } 0 = \int_{|z|=r} f(z) z^{n-1} dz = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) r^n e^{in\theta} d\theta \quad (2)$$

(1) + (2)

§. 4.4 辐角原理与儒歇定理

定理 1. 设 $f \in H(D)$ γ 为 D 中可求长简单闭曲线, γ 内部包含在 D 中.

如果 f 在 γ 上无零点, γ 的内部时零点为 $a_1, \dots, a_k$ 重数分别为 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

$$\text{则 } \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k \alpha_j$$

证 取 $\varepsilon > 0$, s.t. $B(a_i, \varepsilon)$ 包含在 D 中 两两不交

$$\text{由 Cauchy 积分定理, } \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a_i, \varepsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

f 在 a_i 的邻域中可表示为

$$f(z) = (z - a_i)^{\alpha_i} g_i(z) \quad g_i(z) \text{ 全纯且 } g_i(a_i) \neq 0$$

$$\text{此时 } \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha_i (z - a_i)^{\alpha_i - 1} g_i(z) + (z - a_i)^{\alpha_i} g_i'(z)}{(z - a_i)^{\alpha_i} g_i(z)} = \frac{\alpha_i}{z - a_i} + \frac{g_i'(z)}{g_i(z)}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a_i, \varepsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \alpha_i \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B(a_i, \varepsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^k \alpha_i$$

证 2. w 平面曲线 $\gamma: w = w(t), a \leq t \leq b$ $w(t)$ 的辐角为 $\theta(t)$ ($\theta(t)$ 连续)

证 $\Delta_{\gamma} \arg w = \theta(b) - \theta(a)$ 称为辐角

注意 当 γ 为不过原点的闭曲线, 则 $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w} (x)$

证 N 为 γ 内 f 的零点的个数

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w} dw \stackrel{(x)}{=} \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg w \stackrel{\text{证 2}}{=} \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f(z)$$

定理 2 (辐角原理). 条件同定理 1. f 在 γ 中零点的个数 (记重数) = γ 在 f 下的像 $f \circ \gamma$ 绕原点的圈数.

定理 3 (Rouché) 设 $f, g \in H(D)$ γ 为 D 中可求长简单闭曲线, γ 的内部包含在 D 中. 如果当 $z \in \gamma$ 时, $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ 则 $f(z), g(z)$ 在 γ 的内部零点个数相等

证 由条件知 f, g 在 γ 上不为 0

$$|1 - \frac{g(z)}{f(z)}| < 1 \quad \forall z \in \gamma.$$

用 N_f, N_g 表示 f, g 在 r 内部零点个数

$$\begin{aligned} \text{则 } N_f - N_g &= \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{g'(z)}{g(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{g'(z)f(z) - f'(z)g(z)}{f(z)g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\left(\frac{g}{f}\right)'}{\frac{g}{f}} dz \\ &\stackrel{(*)}{=} 0 \quad \left(\frac{g}{f} \text{ 的辐角增量为 } 0\right) \end{aligned}$$

例 2 求方程 $z^4 - 6z + 3 = 0$ 在圆环 $|z|: (1 < |z| < 2)$ 中根的个数

解. ① $|z|=1$ 时 $|(z^4 - 6z + 3) - (-6z)| = |z^4 + 3| \leq 4 < |1 - 6z|$

$\Rightarrow z^4 - 6z + 3$ 在 $|z| < 1$ 中根的个数为 1

② $|z|=2$ 时 $|(z^4 - 6z + 3) - z^4| = |1 - 6z + 3| \leq 15 < |z^4|$

$z^4 - 6z + 3 = 0$ 在 $|z| < 2$ 中根的个数为 4

③ $|z|=1$ 上 $z^4 - 6z + 3 = 0$ 无根.

$\Rightarrow 1 < |z| < 2$ 中根的个数为 3

例 3. 设 $a_1, \dots, a_n \in B(0,1)$ $f(z) = \prod_{k=1}^n \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k}z}$ (有限的 Blaschke 乘积)

证明. 若 $|b| < 1$, 则 $f(z) - b$ 在 $B(0,1)$ 中恰有 n 个根.

证. $|z|=1$ 时 $|f(z)| = \prod_{k=1}^n \left| \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k}z} \right| = 1$

$|f(z) - b| = |b| < |f(z)|$

$\Rightarrow f(z) - b$ 的零点根的个数与 $f(z)$ 相等为 n

例 4. 设 f 在域 D 中全纯, r 为 D 中的圆周, r 的内部包含在 D 中. 若 f 在 r 上只取实数. 证明 f 为常值函数.

证. 设 $z_0 = a + ib$ ($b > 0$)

$f(z) - z_0$ 在 D 中全纯. 在 r 上不等于 0

当 $z \in r$ 时. $\operatorname{Im}(f(z) - z_0) = -b < 0 \Rightarrow \Delta \operatorname{Arg}(f(z) - z_0) = 0$

插角原理

$\Rightarrow f(z) - z_0$ 在 Γ 内部的零点个数 $= 0$

即 $f(z) \neq z_0 \quad \forall z \in \text{int}(\Gamma)$

同理 $b < 0$ 也成立 $\Rightarrow \text{Im}(f(z)) = 0$

由 f 在 D 中全纯 $\Rightarrow f(z) = \text{const}$

定理 4. 设 $f \in H(D)$ $z_0 \in D$ $w_0 = f(z_0)$ 如果 z_0 为 $f(z) - w_0$ 的 m 阶零点 ($m \geq 1$)
则 $\exists \rho_0 > 0$ 当 $0 < \rho < \rho_0$ 时, 存在 $\delta > 0$ 当 $|a - w_0| < \delta$ 时 $f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中
有 m 个零点

证. 由零点的孤立性. $\exists \rho_0 > 0$ s.t. $f(z) - w_0$ 在 $B(z_0, \rho_0)$ 中 除去 z_0 外无其他零点

$$\delta = \min \{ |f(z) - w_0| \mid z \in \partial B(z_0, \rho) \}$$

取 $|a - w_0| < \delta$

$$|(f(z) - a) - (f(z) - w_0)| = |a - w_0| < \delta \leq |f(z) - w_0| \quad z \in \partial B(z_0, \rho)$$

$\Rightarrow f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中零点的个数与 $f(z) - w_0$ 相等即为 m 个

推论 5. 设 $f \in H(D)$ $z_0 \in D$ $f(z_0) = w_0$ 则对充分小的 $\rho > 0$ $\exists \delta = \delta(\rho)$
 $f(B(z_0, \rho)) \supset B(w_0, \delta)$

定义 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 称为开映射 (D 为区域), f 将开集映为开集

注. ① f 连续 $\Leftrightarrow \forall u \subset \mathbb{C}$ 开 $\Rightarrow f^{-1}(u)$ 为开

② $f(z) = |z|$ 连续映射. 不是开映射 $u = \{z: 0 < |z| < 1\}$ $f(u) = (0, 1)$

定理 6. 设 $f \in H(D)$ 且 f 不是常数. 则 f 为开映射

证. 设 $u \subset D$ 为开. 设 $w_0 \in f(u)$. $\exists z_0 \in u$ $f(z_0) = w_0$.

由定理 4. $\exists B(z_0, \rho) \subset u$.

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } f(u) \supset f(B(z_0, \rho)) \supset B(w_0, \delta)$$

$\Rightarrow f(u)$ 为开集

注. $f(D)$ 为区域

例. 用开映射定理证明最大模原理.

设 $f \in H(D)$ f 不是常数. 假设 $\exists z_0 \in D$. $|f(z_0)| = \max_{z \in D} |f(z)|$

取 $\varepsilon > 0$ s.t. $B(z_0, \varepsilon) \subset D$. 由定理 6 $f(B(z_0, \varepsilon))$ 开.

易见. $\exists w \in f(B(z_0, \varepsilon))$ 且 $|f(z_0)| < |w|$

取 $z \in B(z_0, \varepsilon)$ $f(z) = w \Rightarrow |f(z)| > |f(z_0)|$

定理 7. 设 $f \in H(D)$ 且 f 为单叶的. 则 $\forall z \in D$ $f'(z) \neq 0$.

证. 用反证法. 假设 $\exists z_0 \in D$. $f'(z_0) = 0$. 记 $w_0 = f(z_0)$

则 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点. 且 $m \geq 2$.

由零点的孤立性 $\exists \varepsilon > 0$.

$f(z)$ 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 中除 z_0 无其他零点.

由定理 4. 取 ρ 很小. $(\rho < \varepsilon)$.

$\exists \delta > 0$. $|w - w_0| < \delta$ 时 $f(z) - w$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中有 m 个零点.

记为 $z_1, \dots, z_m$ 由于 $f'(z_j) \neq 0$ 均为 1 阶零点.

故 $z_1 \neq z_2 \neq \dots \neq z_m$. 与 f 单叶矛盾.

注①定理 4 中若 $m \geq 2$ 可加强为 m 个互不相同的零点.

②逆命题不成立 $f(z) = e^z$. 但是局部成立.

定理 8. 设 $f \in H(D)$ $z_0 \in D$. 且 $f'(z_0) \neq 0$. 则 f 在 z_0 的某个邻域是单叶的.

证. 设 $w_0 = f(z_0)$ z_0 为 $f(z) - w_0$ 的 1 阶零点.

由定理 4. $\exists \rho > 0$ $\exists \delta > 0$ $|w - w_0| < \delta$ 时

存在唯一 $z \in B(z_0, \rho)$ s.t. $f(z) = w$.

由 f 连续. $\exists \varepsilon > 0$. $\varepsilon < \rho$. $f(B(z_0, \varepsilon)) \subset f(w, \delta)$

$\Rightarrow$ 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 上单叶.

定理 9. 设 f 为 D 上的单叶全纯函数, 则 $f^{-1}(f(D)) \rightarrow D$ 为单叶全纯.

且 $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}$, $\forall w \in f(D)$. 其中 $f(z) = w$.

证. f 为开映射 $\Rightarrow f^{-1}$ 连续

设 $w_0 \in f(D)$, $z_0 \in D$, 且 $f(z_0) = w_0$

$$(f^{-1})'(w_0) = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

定理 10. (Hurwitz) 设 f_n 为 D 上的全纯函数列, 在 D 上内闭一致收敛于不恒为 0 的函数 f . γ 为 D 中可求长简单闭曲线, γ 的内部位于 D 中且不经过 f 的零点. 则存在 N , $n \geq N$ 时, f_n 与 f 在 γ 内部时零点个数相同

证由 Weierstrass 定理 f 在 D 中全纯. $f|_{\gamma} \neq 0$

$$\min \{ |f(z)| : z \in \gamma \} = \varepsilon > 0$$

$f_n \Rightarrow f$ on γ . $\Rightarrow \exists N$, $\exists n \geq N$ 时, $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)| \quad \forall z \in \gamma$.

用 Rouché 定理即可.

定理 11. 设 f_n 为域 D 上的一列单叶全纯函数, 在 D 中内闭一致收敛于 f . 如果 f 不是常数, 则 f 为单叶全纯.

证反证法 假设 f 不是单叶的

$$\exists z_1, z_2 \in D, \quad f(z_1) = f(z_2) = w_0. \quad \text{记 } F(z) = f(z) - w_0$$

由于 $F(z)$ 不是常数, 由零点孤立性, $\exists \varepsilon > 0$, st

$B(z_1, \varepsilon) \cap B(z_2, \varepsilon) = \emptyset$. $F(z)$ 在 $\overline{B(z_1, \varepsilon)}, \overline{B(z_2, \varepsilon)}$ 除 z_1, z_2 无零点.

由定理 10, $\exists N$, $n \geq N$ 时, $f_n(z) - w_0$ 与 $F(z)$ 的零点个数相同. 矛盾

例 设 $r > 0$. 证明 当 n 充分大时, $f_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$ 在 $B(0, r)$ 中, 没有根.

证. $f_n(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中内闭一致收敛, 到 e^z

由定理 10 即可.

Ch 5. Laurent 级数及应用

§ 5.1. Laurent 展开.

称级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$
 为 Laurent 级数. 主要部分

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ 在 $|z-z_0| < R$ 中全纯

令 $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \zeta^n$ 的收敛半径为 ρ . $|\zeta| < \rho$ 内闭一致收敛

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ 在 $|z-z_0| > \frac{1}{\rho} = r$ 中全纯.

当 $0 < r < |z-z_0| < R$ 时 Laurent 级数在圆环内闭一致收敛.

定理 1. 设 $D = \{z, 0 < r < |z-z_0| < R\}$ 如果 $f \in H(D)$ 则 f 可^{唯一}展开成 Laurent

级数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ 且 $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta$, $r < \rho < R$

证. 注意 a_n 的表达式中不依赖于 ρ 的选取.

任取 $z \in D$. 取 r_1, r_2 s.t.

$$r < r_1 < |z-z_0| < r_2 \quad \gamma_j = \{z, |z-z_0| = r_j\}, \quad (j=1,2)$$

$$\text{由 Cauchy 积分公式} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

$$|z| \quad n_j = \max\{|f(\zeta)|, \zeta \in \gamma_j\}.$$

$$\text{当 } \zeta \in r_1 \text{ 时} \quad \frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} f(\zeta) \frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (\zeta \in r_1)$$

$$\text{由于} \quad \left| f(\zeta) \frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{|z-z_0|} \left(\frac{|z-z_0|}{|z-z_0|} \right)^{n+1}$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{r_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^{n+1} d\zeta$$

$$\text{同理} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{r_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n d\zeta$$

唯一性 若 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a'_n (z-z_0)^n$ 在 $|z-z_0| = \rho$ 上一致收敛

$$a'_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a'_n \int_{\gamma_\rho} (\zeta-z_0)^n (\zeta-z_0)^{-m-1} d\zeta = a'_m$$

例1. 设 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别给出它在 $1 < |z| < 2$ 和 $2 < |z| < +\infty$ 上的 Laurent 展开式

$$\begin{aligned} (1) \quad 1 < |z| < 2, \quad f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \right) - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad |z| < 1 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z| > 2, \quad f(z) &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}} \end{aligned}$$

§5.2 孤立奇点

定义. 若 f 在 $0 < |z - z_0| < R$ 中全纯, 在 z_0 处无定义, 则称 z_0 为孤立奇点.

非孤立奇点, $f(z) = \sin \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{k\pi} \rightarrow 0$

定义. 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$, 称 z_0 为可去奇点. 全纯点 $\leftarrow$ Taylor 级数

(2) 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, 称 z_0 为极点. 孤立奇点 $\leftarrow$ Laurent 级数

(3) 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在, 则称 z_0 为本性奇点. 工具

定理1. (Riemann 可去定理). z_0 为 f 的可去奇点 $\Leftrightarrow f$ 在 z_0 附近有界

证 $\Rightarrow$ 显然

$\Leftarrow$ 设 $\varepsilon > 0$, $0 < |z - z_0| < \delta$ 时 $|f(z)| \leq M$.

设 f 的 L 级数为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=p} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \text{不妨设 } 0 < p < \delta$$

$$\text{当 } n \geq 1 \text{ 时 } |a_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=p} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}} d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{p^{-n+1}} 2\pi p = M p^n \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \therefore \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$$

注 若 f 在 $0 < |z - z_0| < R$ 中全纯, z_0 为可去奇点.

则 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 只要令 $f(z_0) = a_0$.

则 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R$ 中全纯

命题 2. z_0 为 f 极点 $\Leftrightarrow z_0$ 为 $\frac{1}{f}$ 的零点.

定义 若 z_0 为 f 的 m 阶零点, 则称 z_0 为 f 的 m 阶极点.

定理 3. z_0 为 f 的 m 阶极点 $\Leftrightarrow \exists R > 0$ f 在 $0 < |z - z_0| < R$ 中的 Laurent 展开式满足 $a_{-m} \neq 0$ $a_{-n} = 0$ ($n > m$)

证. $\Rightarrow$ 设 z_0 为 f 的 m 阶极点, 则 z_0 为 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点.

在 z_0 的邻域中 $\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m g(z)$ $g(z)$ 在 z_0 处全纯 $g(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{g(z)}$ 在 z_0 处全纯 $\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ $c_0 \neq 0$

$\therefore f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^m} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \dots$

$\Leftarrow$ 由条件 $(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-(m-1)}(z - z_0) + \dots = \varphi(z)$

$\varphi(z)$ 在 z_0 处全纯 $\varphi(z_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\varphi(z)}$ 在 z_0 处全纯

$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m \frac{1}{\varphi(z)}$ 具 m 阶零点.

综上 (1) z_0 为 f 的可去奇点 $\Leftrightarrow a_{-n} = 0$ ($n \geq 1$)

(2) z_0 为 f 的极点 $\Leftrightarrow \exists m \geq 1$ $a_{-m} \neq 0$ 且 $n > m$ 时 $a_{-n} = 0$

(3) z_0 为 f 的本性奇点 $\Leftrightarrow$ 有无穷多 $n \geq 1$ $a_{-n} \neq 0$

例 $z=0$ 为 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点, $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$

定理 4 (Weierstrass 定理) 设 z_0 为 f 的本性奇点, 则 $\forall A \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\exists z_n \rightarrow z_0$ s.t. $f(z_n) \rightarrow A$

证. (1) $A = \infty$ 由定理 1. f 在 z_0 的附近无界.

$\forall n > 0 \exists z_n$ s.t. $|z_0 - z_n| < \frac{1}{n}$ 且 $|f(z_n)| > n$

故 $z_n \rightarrow z_0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$

(1) 设 $A \in \mathbb{C}$. 令 $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$ 下证 $\varphi(z)$ 在 z_0 附近无界

假设 $\varphi(z)$ 在 z_0 附近有界. z_0 为 $\varphi(z)$ 的可去奇点

(i) $\varphi(z_0) \neq 0 \Rightarrow f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}$ 全纯矛盾

(ii) 若 $\varphi(z_0) = 0$ 则 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Rightarrow z_0$ 为 f 极点 矛盾

$\Rightarrow \varphi(z)$ 在 z_0 附近无界. 故 $z_n \rightarrow z_0$ $f(z_n) \rightarrow A$

定义 设 f 在 $R < |z| < +\infty$ 中全纯则称 ∞ 为 f 的孤立奇点.

令 $g(z) = f(\frac{1}{z})$ 则 $g(z)$ 在 $0 < |z| < \frac{1}{R}$ 中全纯

如果 $z=0$ 为 $f(\frac{1}{z})$ 的可去奇点 极点 本性奇点.

则相应地称 ∞ 为 $f(z)$ 的 ...

设 $f(z)$ 在 $R < |z| < +\infty$ 中展为 L-展开为 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$

$$\therefore g(z) = f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$$

∞ 为 f 的可去奇点 $\Leftrightarrow n \geq 1$ $a_n = 0$ $\rightarrow f$ 在 ∞ 处全纯

极点 $\Leftrightarrow \exists m = q_m \neq 0$ $n > m$ $a_n = 0$

本性奇点 $\Leftrightarrow$ 无穷多 a_n $n > 0$ $a_n \neq 0$

例 ∞ 为 e^z 的本性奇点.

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{e^z - 1}$$

$$z_k = 2k\pi i \quad (e^z - 1)'(z_k) = e^{z_k} \neq 0$$

z_k 是 $f(z)$ 的 1 阶极点.

$z=1$ 是 f 的本性奇点.

$z=\infty$ 是 f 的非孤立奇点.

§5.3 整函数与亚纯函数

若 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯. 则 f 为整函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad z \in \mathbb{C}$$

定理1. 设 f 为整函数

(1) 若 ∞ 为 f 的可去奇点, 则 f 为常数

(2) 若 ∞ 为 f 的极点, 则 f 为多项式

不是上两种的称为超越整函数

∞ 为超越整函数的本性奇点

定义. 若 f 在 $\mathbb{C}$ 上只有孤立奇点且均为极点, 则称 f 为亚纯函数

例多项式 $\frac{p_n(z)}{q_m(z)}$ (有理函数) $\frac{1}{\sin z}$ (有无穷多极点)

$e^{\frac{1}{z}}$ (非亚纯函数)

定理2. 若 ∞ 为一个亚纯函数的可去奇点或极点, 则 $f(z)$ 为有理函数

证 ∞ 为孤立奇点 $\Rightarrow \exists R > 0$, f 在 $|z| > R$ 中全纯

$\Rightarrow f$ 的极点全在 $|z| < R$ 中, 故只能有有限多个

记为 $z_1, z_2, \dots, z_n$. 其阶数为 $m_1, m_2, \dots, m_n$

f 在 z_j 附近的 Laurent 展开式的主要部分为

$$h_j(z) = \frac{a_{-m_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{m_j}} + \dots + \frac{a_{-1}^{(j)}}{z-z_j}$$

设 f 在 ∞ 附近的 Laurent 展开式的主要部分是 $g(z)$

则 $g(z)$ 为多项式

$$\text{令 } F(z) = f(z) - \sum_{j=1}^n h_j(z) - g(z), \quad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

则 $F(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯且 ∞ 为 f 的可去奇点.

由定理1, $F(z)$ 为常数

定理3. $\text{Aut}(\mathbb{C})$ 由所有的一次函数构成

证 $f = az + b \quad (a \neq 0)$ 则 $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$

反之 $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$

若 ∞ 为 f 的可去奇点, 则 f 为常数 矛盾

若 ∞ 为 f 的本性奇点, 由上节 Weierstrass,

对于 $A \in \mathbb{C}$, $\exists z_n \rightarrow \infty$ 且 $f(z_n) \rightarrow A$

$$\Rightarrow f'(f(z_n)) \rightarrow f'(A) \quad \Rightarrow f'(A) = \infty$$

$z_n \rightarrow \infty$

由于 $f' \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ $f'(A) \in \mathbb{C}$ 矛盾

故 ∞ 为 f 的极点, 由定理 1 f 为多项式

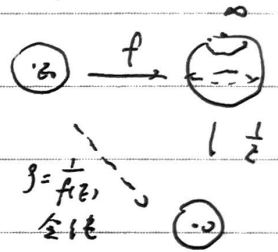
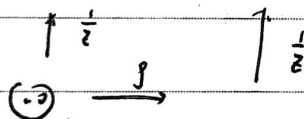
由于 f 单射, 从而一次

定理 4. $\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ 由所有的分式线性变换构成

$f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ 全纯即含义是什么.

① $f(\infty) = \alpha \in \mathbb{C}$, ② $\exists z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z_0) = \infty$ (z_0 为极点)

③ $f(\infty) = \infty$.



f 在 ∞ 全纯 $\Leftrightarrow g(z) = f(\frac{1}{z})^{-1}$ 在 $z=0$ 全纯

$$f|_{\mathbb{C}} = f|_{\mathbb{C}} = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{易见 } f \in \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$$

$\Rightarrow$ (1) 假设 $\exists z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z_0) = \infty$.

则 $f|_{\mathbb{C}}$ 为亚纯函数, 有唯一的极点 z_0 .

且 $f(\infty) \in \mathbb{C}$ 故 ∞ 为 $f|_{\mathbb{C}}$ 上的可去奇点

由定理 2, $f|_{\mathbb{C}}$ 是有理函数

由于 f 为单射, 故 f 为分式线性变换

(2) $f(\infty) = \infty$, $f|_{\mathbb{C}}$ 是整函数, 且 ∞ 为 $f|_{\mathbb{C}}$ 上的极点.

$\Rightarrow f$ 为多项式, 由 $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}) \Rightarrow f$ 一次

§5.4. 留数定理.

定义 设 a 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 设 f 在 $0 < |z-a| < r$ 中全纯且 f 的 Laurent 展开式为 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ 称 c_{-1} 为 f 在 a 处的留数, 记为 $\text{Res}(f, a)$.

$$\text{由于 } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

$$\therefore c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} f(z) dz$$

定理 (留数定理) 设 D 域 D 的边界 Γ 为若干条可求长简单闭曲线

若 f 在 D 中除去孤立奇点 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 外是全纯的, 且 Γ 上除去 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 是连续的, 则 $\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j)$

命题 2 若 a 为 f 的 m 阶极点, 则

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z))$$

$$\text{证. 设 } f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z) \quad (g(z) \text{ 全纯})$$

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m g(z)$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, a) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z))$$

命题 3 设 $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ g, h 在 a 处全纯, 且 $g(a) \neq 0, h(a) = 0, h'(a) \neq 0$

$$\text{则 } \text{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

证. 由条件知 a 为 f 的 -1 阶极点.

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \cdot \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

150) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$ 在 $z=-i$ 处的留数

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \left((z+i)^2 \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{z(z-i)^2} \right) = \frac{e}{4}$$

131) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{\sin z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\sin z}, 0\right)$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^z}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{z(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots)} \cdot z = \frac{1}{1} = 1$$

131. $\int_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$

$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z \cdot e^{\frac{1}{z}} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{n!} z^{n-1} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{z} \text{ 的系数} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)! n!}$$

§5.5. 定积分的积分

引理 1. (i) 若 $f(z)$ 在 $D: 0 < |z-a| < r, \theta_1 \leq \arg(z-a) \leq \theta_2$ 上连续, 且 $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = A$

则 $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = Ai(\theta_2 - \theta_1)$

(ii) 若 $f(z)$ 在 $D: R < |z-a| < +\infty, \theta_1 \leq \arg(z-a) \leq \theta_2$ 上连续, 且 $\lim_{z \rightarrow \infty} (z-a)f(z) = A$

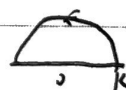
则 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = Ai(\theta_2 - \theta_1)$

证 (i) $\gamma_r: z = a + \rho e^{i\theta}, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} f(z) dz &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(a + \rho e^{i\theta}) \rho e^{i\theta} i d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} (z-a) f(z) i d\theta \rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} A i d\theta = Ai(\theta_2 - \theta_1) \quad (r \rightarrow 0) \end{aligned}$$

引理 2. (Jordan) 若 $f(z)$ $R_0 \leq |z| < \infty, \operatorname{Im} z \geq 0$ 上连续, 且 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. 设

$\alpha > 0$, 则 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0$



证. 设 $M(R) = \max_{z \in \gamma_R} |f(z)| \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$

$$\left| \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz \right| \leq M(R) \int_0^\pi |e^{i\alpha R(\cos\theta + i\sin\theta)}| R d\theta = M(R) \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin\theta} R d\theta$$

$$= 2M(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin \theta} R d\theta$$

$$\leq 2M(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \cdot \frac{2}{\pi} \theta} R d\theta = \frac{\pi}{\alpha} M(R) \cdot (1 - e^{-\alpha R})$$

$$R \rightarrow \infty \quad \text{上式} \rightarrow 0$$

例 1. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \quad n \geq 0$

① 被积函数扩充到复平面

$$F(z) = \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$$

② 寻找合适的积分路径



$$\int_{-R}^R \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} + \int_{\Gamma_R} F(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(F(z), i)$$

$$\operatorname{Res}(F(z), i) = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^n}{dz^n} \left[(z-i)^{n+1} \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}} \right]$$

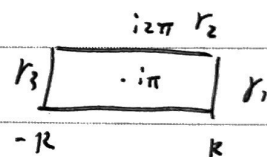
$$= \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^n}{dz^n} \left[\frac{1}{(z+i)^{n+1}} \right] = \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)(n+2) \cdots (n+n)}{(2i)^{2n+1}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n} (n!)^2}$$

注: 若 $f(x)$ 为偶函数 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

例 2. 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \quad (0 < a < 1)$

$$F(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$



$$\int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx + \int_{r_2} F(z) dz + \int_{r_4} F(z) dz + \int_{r_3} F(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(F, i\pi)$$

$$\operatorname{Res}(F, i\pi) = \lim_{z \rightarrow i\pi} (z - i\pi) \frac{e^{az}}{1+e^z} = \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{e^{az}}{\frac{e^z - e^{i\pi}}{z - i\pi}} = \frac{e^{ai\pi}}{e^{i\pi}} = -e^{ai\pi}$$

$$\left| \int_{r_1} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|e^{a(R+iy)}|}{|e^{R+iy} + 1|} dy \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{\frac{1}{2}e^R} dy = 4\pi e^{(a-1)R} \rightarrow 0 \quad R \rightarrow +\infty$$

$$\left| \int_{r_3} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|e^{a(-R+iy)}|}{|e^{-R+iy} + 1|} dy \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-aR}}{\frac{1}{2}} dy \rightarrow 0$$

$$\int_{r_2} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{2\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2\pi i (e^{-\pi i})}{1 - e^{2\pi i}} = \frac{\pi}{\sin(\pi/4)}$$

例1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax \, dx$ 或 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax \, dx \quad (a > 0)$

$$\frac{1}{2} F(z) = e^{iaz} f(z)$$

例 (Laplace) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$

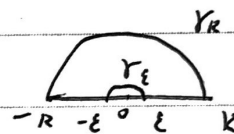
$$\frac{1}{2} F(z) = \frac{e^{iaz}}{1+z^2}$$

$$\int_{-R}^R \frac{e^{iax}}{1+x^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 2\pi i \operatorname{Res}(F(z), i) = \pi e^{-a}$$

$$\frac{1}{2} R \rightarrow \infty \text{ 取实部 } \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \pi e^{-a}$$

例1) (Dirichlet) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad F(z) = \frac{e^{iz}}{z}$

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} = 0$$



$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow -i\pi \quad (|z| \rightarrow 0) \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow 0 \quad (\text{Jordan})$$

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx = - \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int_{\varepsilon}^R \frac{2i \sin x}{x} dx \rightarrow i\pi$$

$$\text{即 } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

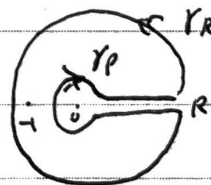
(2) $\int_0^{+\infty} f(x) dx \quad \frac{\pi i}{2}$

例1) $1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m} dx \quad m \text{ 为正整数, } p \text{ 不是整数且 } 0 < p < m$

$$\frac{1}{2} F(z) = \frac{z^{p-1}}{(1+z)^m} = \frac{e^{(p-1)\log z}}{(1+z)^m}$$

正实轴上沿 $F(z) = \frac{e^{(p-1)\log x}}{(1+x)^m} = \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}$

正实轴下沿 $F(z) = \frac{e^{(p-1)(\log x + 2\pi i)}}{(1+x)^m} = \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m} \cdot e^{2\pi p i}$



$$\int_{\varepsilon}^R \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m} dx + \int_{\Gamma_R} + \int_R^{\varepsilon} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m} e^{2\pi p i} dx + \int_{\Gamma_\rho} = 2\pi i \operatorname{Res}(F(z), -1)$$

No.

Date.

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{(p-1)\log z}}{(1+z)^m} dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} \frac{R^{p-1}}{(R-1)^m} |dz| = 2\pi \frac{R^p}{(R-1)^m} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$\left| \int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{(p-1)\log z}}{(1+z)^m} dz \right| \leq \int_{\Gamma_\rho} \frac{\rho^{p-1}}{(1-\rho)^m} |dz| = 2\pi \frac{\rho^p}{(1-\rho)^m} \rightarrow 0$$

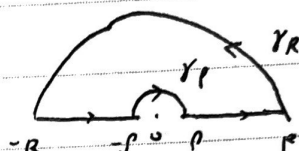
$$m=1 \text{ At } \operatorname{Res} \left(\frac{z^{p-1}}{1+z} \cdot -1 \right) = \lim_{z \rightarrow -1} z^{p-1} = e^{(p-1)\log(-1+i\pi)} = -e^{p\pi i}$$

$m > 1$ At ...

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$$

Ex. 1. $I = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx.$

Let $F(z) = \frac{\log z}{(1+z^2)^2}$



$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{\log z + i\pi}{(1+z^2)^2} dx + \int_{\Gamma_\rho} F(z) dz + \int_{\rho}^R \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx + \int_{\Gamma_R} F(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(F(z), i)$$

$$\therefore 2 \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx + i\pi \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2\pi i}{\pi} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{i}{4} \right)$$

取实部得 $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}$

3) $\int_0^{2\pi} R(\sin \theta \cos \theta) d\theta$ $R(x, y)$ 有理

Let $z = e^{i\theta}$ $\sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$ $\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

$dz = e^{i\theta} i d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{1}{iz} dz$

$$\int_0^{2\pi} R(\sin \theta \cos \theta) d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz} dz$$

4) Fresnel 积分 $I_1 = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ $I_2 = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$

Let $F(z) = e^{iz^2}$

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{\Gamma_R} e^{iz^2} dz + \int_{\Gamma_2} e^{iz^2} dz = 0$$



$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{iz^2} dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} |e^{iR^2(\cos \theta + i \sin \theta)}| |dz| = \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin \theta} R d\theta$$

$$\leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \frac{\pi}{4} \theta} R d\theta = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty)$$

$$\int_{\Gamma_1} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ir^2 i} e^{i\frac{\pi}{4}} dr = \int_0^R e^{-r^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dr \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \cos x^2 + i \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

(5) Poisson 积分 $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx \quad (a > 0)$

令 $F(z) = e^{-az^2}$

$$\int_{-R}^R e^{-ax^2} dx + \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} F(z) dz = 0$$

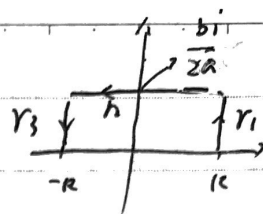
易见 $\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_3} \rightarrow 0$

$$\int_{\Gamma_2} e^{-az^2} dz = \int_{-R}^R e^{-a(x + \frac{b}{2a}i)^2} dx$$

$$= -e^{-\frac{b^2}{4a}} \int_{-R}^R e^{-ax^2} e^{-bix} dx$$

$$= -e^{-\frac{b^2}{4a}} \int_{-R}^R e^{-ax^2} \cos bx \, dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$



§5.6. Mittag-Leffler 定理和 Weierstrass 因子分解定理.

定理 1. (Mittag-Leffler) 设 $a_n \in \mathbb{C}$ 满足 $|a_1| < |a_2| < \dots$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$

设 $\psi_n(z) = \sum_{j=1}^{k_n} \frac{c_{nj}}{(z-a_n)^j}$. 则 $\exists \mathbb{C}$ 上的亚纯函数 $f(z)$, 恰好以 $\{a_n\}$ 为极点集. 且在 a_n 处的 Laurent 展开式的主要部分为 $\psi_n(z)$.

证. 不妨设 $a_n \neq 0$. 对 $\forall n$.

$\psi_n(z)$ 在 $B(0, \frac{|a_n|}{2})$ 中全纯. 其 Taylor 级数在 $B(0, \frac{|a_n|}{2})$ 中一致收敛于 $\psi_n(z)$

故 $\exists$ 多项式 $Q_n(z)$, s.t. $|\psi_n(z) - Q_n(z)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall |z| \in \frac{|a_n|}{2}$

$$\text{令 } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n(z) - Q_n(z))$$

由 W 判别法 级数在 $\mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中内闭一致收敛

(因两部分, N 之后的每项都很小)

a_n 为 f 的极点 且在 a_n 处 Laurent 展开式主要部分为 $\psi_n(z)$

设 $c_n \in \mathbb{C}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{c_n} (c_n + 1)$ 存在不为 0. $\Rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (c_i + 1) \neq 0$

(1) $\prod_{n=1}^{\infty} (c_n + 1)$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$

(2) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |c_n|)$ 收敛 $\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n)$ 收敛

命题. 若 $f(z)$ 为整函数且没有零点, 则存在整函数 $\varphi(z)$ $f(z) = e^{\varphi(z)}$

若 $f(z)$ 只有有限个零点 $0, a_1, \dots, a_n$ 重数分别为 $m, m_1, \dots, m_n$ 令

$$p(z) = z^m (z - a_1)^{m_1} \dots (z - a_n)^{m_n} = H z^m \left(1 - \frac{z_1}{a_1}\right)^{m_1} \dots \left(1 - \frac{z_n}{a_n}\right)^{m_n}$$

则 $h(z) = \frac{f(z)}{p(z)}$ 整函数无零点 故 $\exists \varphi(z)$ 整函数

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z^m \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{m_k}$$

设整函数 $f(z)$ 的非零零点为 $a_1, \dots, a_n, \dots$ 且 $0 < |a_1| < |a_2| < \dots$ $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$

考虑 $\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}} = E_n$

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \log E_n}$$

给定 $R > 0$ $\exists N$ 当 $n \geq N$ 时 $\left|\frac{z}{a_n}\right| < \frac{1}{2}$

$$|\log E_n| = \left| \log \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k \right|$$

$$= \left| -\frac{z}{a_n} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 - \dots - \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1} - \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n - \dots + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k \right|$$

$$= \left| -\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k \right| \leq \left(\frac{z}{a_n}\right)^n (1 + \left|\frac{z}{a_n}\right| + \left|\frac{z}{a_n}\right|^2 + \dots) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} \log E_n$ 在 $|z| \leq R$ 中一致收敛

$\Rightarrow \prod_{n=N}^{\infty} E_n$ 在 $|z| \leq R$ 中一致收敛

$\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ 在 $|z| < R$ 中全纯

且它在 $|z| \leq R$ 中无零点为 a_n ($|a_n| < R$)

由 R 任意性 $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ 为整函数以 a_n 为零点

定理 (Weierstrass 因子分解定理). 给定 $\mathbb{C}$ 的一列点 $\{a_n\}$ 及正整数 k_n 存在整函数 $f(z)$ 恰以 $\{a_n\}$ 为零点, 且在 a_n 处重数为 k_n

Ch6. 全纯开拓

定义 设 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯 若 $\exists D^* \supset D$ 及全纯函数 $F: D^* \rightarrow \mathbb{C}$ 满足

$F|_D = f$ 则称 F 为 f 的全纯开拓

全纯开拓是唯一的

不是所有的全纯函数都可以全纯开拓 ($f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$)

例 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ($|z| < 1$) $F(z) = \frac{1}{1-z}$ $n = \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$F(z)$ 为 $f(z)$ 的全纯开拓

§6.1. Schwarz 对称原理

定理1. (Painlevé 定理) 设 D 为区域 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ 为 D 中可求长曲线. 如果 f 在 D 上连续, 在 $D \setminus \bigcup_{j=1}^n \gamma_j$ 中全纯, 则 f 在 D 中全纯

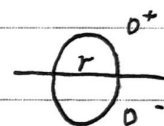
证 任取 $a \in D$, 取 $r > 0$ 使 $B(a, r) \subset D$



由 Cauchy 积分定理, 对 $B(a, r)$ 中任意简单闭曲线 γ

$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ 由 Morera 定理知 f 在 $B(a, r)$ 中全纯

定理2. (Schwarz 对称原理) 设 D 关于实轴对称. 如果



(1) $f: D^+ \cup \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ 满足

(i) $f: D^+ \subset \mathbb{C}$ 全纯, (ii) f 在 $D^+ \cup \gamma$ 上连续

(iii) $f(\gamma) \subset \mathbb{R}$.

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D^+ \cup \gamma \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in D^- \end{cases}$$

证 设 $z_0 \in D^-$. 则 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \overline{f'(\bar{z}_0)}$

故 $F(z)$ 在 D^- 中全纯

设 $z_0 \in \gamma$. 若 $z_n \in D^-$ 且 $z_n \rightarrow z_0$ 则 $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}_0 = z_0$

$$f(\bar{z}_n) \rightarrow f(z_0) \Rightarrow \overline{f(\bar{z}_n)} \rightarrow \overline{f(z_0)} = f(z_0)$$

故 f 在 $D^+ \cup \gamma$ 上连续

由定理1, $F(z)$ 全纯

No.

Date. / /

定理3. 推广 Schwarz 对称原理.

如图所示, r 为圆周或一段圆弧 $f: D^+ \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯, 且 f 在 $D^+ \cup r$ 上连续.
 $f(r)$ 为圆周或一段圆弧, 则 f 可以延拓为 $D^+ \cup r \cup D^-$ 上全纯.

证明 完全类似 (把对称点映为对称点.)

例如 $r: |z|=1, f(r) \subset \mathbb{R}$

$$z \in D^- \quad f(z) = \overline{f(\frac{1}{\bar{z}})}$$

例1. 设 $f: \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ 上全纯且在 $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ 上连续, $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. 若 f 有界, 证明 f 为常数证. 由 S-对称原理, f 可以开拓为整函数 $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 且对 $z \in \{z \mid \operatorname{Im} z < 0\}$

$$|F(z)| = |\overline{f(\bar{z})}| \leq m \Rightarrow F \text{ 有界整函数} \Rightarrow F \text{ 为常数}$$

例2. 设 $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯 $f(z) = f(\frac{1}{\bar{z}})$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. 记 $r = \{z \mid |z|=1\}$ 若 $f(r) \subset \mathbb{R}$, 证明 $x \in \mathbb{R}$ 且 $x \neq 0$ 时, $f(x) \in \mathbb{R}$.证. 记 $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. 则 $D \setminus r$ 的两个连通分支 D^+, D^- 关于 r 对称, $f(r) \subset \mathbb{R}$ 由定理3, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 可看成 $f|_{D^+}$ 或 $f|_{D^-}$ 上的全纯

$$\Rightarrow \forall z \in D \quad f(z) = \overline{f(\frac{1}{\bar{z}})}$$

$$\text{当 } z = x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \overline{f(\frac{1}{x})} = \overline{f(x)}$$

$$\Rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

例3. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$ 与 $G = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z| < R_2\}$ 为全纯等价

$$\Leftrightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{R_2}{R_1} \text{ 且 双全纯映射 } f: D \rightarrow G \text{ 满足 } f(z) = e^{i\theta} \frac{R_2}{r_2} z \text{ 或 } f(z) = e^{-i\theta} \frac{R_1}{r_1} \frac{1}{z}$$

证. 显然.

 $\Rightarrow$ 设 $f: D \rightarrow G$ 为双全纯映射. 由边界对应原理. f 将 D 同胚地映为 G 假设 f 将 $|z|=r_1$ 映为 $|z|=R_1$

由 S -对称原理, f 可以全纯地开拓到圆环 $\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < r_2$

依次下去 f 可开拓为 $|z| < r_2$ 上的全纯 $\Rightarrow f(z) = e^{i\theta} \frac{R_2}{r_2} z$

($z=0$ 周围有界 $\Rightarrow z=0$ 为可去奇点)

假设 f 将 $|z|=r_1$ 映为 $|z|=R_2$

令 $g(z) = \frac{R_1 R_2}{f(z)}$ $g(z)$ 全纯将 $|z|=r_1$ 映为 $|z|=R_1$

$\Rightarrow g(z) = e^{i\theta} \frac{R_2}{r_2} z \Rightarrow f(z) = e^{-i\theta} \frac{r_1 R_2}{z}$

§6.2. 幂级数的全纯开拓

设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R .

取 $\zeta \in \partial B(0, R)$ 在 $\overline{O_\zeta}$ 上取 z_0 . $f(z)$ 在 z_0 处有 Taylor 展开. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$

记它的收敛半径为 ρ 则 $\rho \geq R - |z_0|$

若 $\exists z_0 \in \overline{O_\zeta}$ s.t. $\rho > R - |z_0|$ 则称 ζ 为正则点

若 $\forall z_0 \in \overline{O_\zeta}$ $\rho = R - |z_0|$ 则称 ζ 为奇点.

例. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $R=1$

设 $|z_0| < 1$ 且 $z_0 \neq 0$. 由于 $|z_0| < 1$ 则 $f(z) = \frac{1}{1-z}$

$\Rightarrow f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{(1-z_0)^{n+1}} \Rightarrow f$ 在 z_0 处的 Taylor 展开为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$$

它的收敛半径 $\rho = |1-z_0| > 1-|z_0|$ ($z_0 \in (0, 1)$)

$f(z)$ 的全纯开拓意义下奇点为 $\zeta = 1$

定理 1. 幂级数收敛圆周上必有奇点.

证. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\gamma = \partial B(0, R)$.

假设 γ 无奇点. $\forall \zeta \in \gamma$ 存在以 ζ 为中心的圆盘 B_ζ .

以及全纯函数 f_ζ 且 $f_\zeta(z) = f(z) \quad \forall z \in B(0, R) \cap B_\zeta$

$\{B_\zeta, \zeta \in \gamma\}$ 为 γ 的开覆盖. 有有限子覆盖 $\{B_{\zeta_j}, 1 \leq j \leq n\}$.

设 $D = B(0, R) \cup (\bigcup_{j=1}^n B_{\zeta_j})$ 定义 $g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in B(0, R) \\ f_{\zeta_j}(z) & z \in B_{\zeta_j} \end{cases}$

$g(z)$ 是 well-defined

当 $z \in B(0, R) \cap B_{L_i} \cap B_{L_j}$ 时, $g(z) = f_i(z)$

而由唯一性定理 $f_{L_i}(z) = f_{L_j}(z)$ $z \in B_{L_i} \cap B_{L_j}$

$g(z)$ 全纯且在 $z=0$ 处 Taylor 级数收敛半径 $> R$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \text{ 矛盾.}$$

例. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ 的收敛半径 $R=1$. $\partial B(0,1)$ 都是奇点.

证假设 $\exists \zeta_0 \in \partial B(0,1)$ 是正则点. $\exists z_0 \in \overline{B_{\rho_0}}$.

由于有理数稠密性, $\exists \zeta_1 \in \partial B(0,1)$

且 $\zeta_1 = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ p, q 整数 $\zeta_1 \in \overline{B_{\rho_0}}$

$$g(\zeta_1) = \lim_{r \rightarrow 1^-} g(r\zeta_1) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(r\zeta_1)$$

$$f(r\zeta_1) = \sum_{n=1}^{q-1} (r\zeta_1)^{n!} + \sum_{n=q}^{+\infty} (r\zeta_1)^{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{q-1} (r\zeta_1)^{n!} + \sum_{n=q}^{+\infty} r^{n!}$$

$$\forall N > q \quad \sum_{n=q}^{+\infty} r^{n!} \geq \sum_{n=q}^N r^{n!} \geq (N-q+1)r^{N!}$$

$$\text{令 } r \rightarrow 1^- \quad \text{则 } \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=q}^{+\infty} r^{n!} \geq N-q$$

$$\text{由 } N \text{ 任意性 } \sum_{n=q}^{+\infty} r^{n!} = +\infty$$

即 $g(\zeta_1) \rightarrow +\infty$ 矛盾

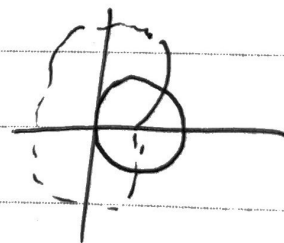
(1) 若幂级数可以沿曲线 γ 开拓, 则开拓是性-形

(2) 若区域 D 为单连通, 则开拓不依赖于曲线选取.

(单值化定理)

(3) 若 D 不是单连通, 则开拓可得到多值函数

例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n = \log z \quad |z-1| < 1$



第七章 共形映射. conformal mapping

§7.1. 正规族 (normal family)

定义. 设 F 为域 D 上的函数族. 如果它的任意序列 $\{f_n\} \subset F$ 一定有一个子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 D 上内闭一致收敛. 则称 F 为正规族

定义. 设 F 为域 D 上的函数族. 如果 $\exists M > 0$, 对 $\forall f \in F$ 及 $\forall z \in D$, 都有 $|f(z)| \leq M$ 则称 F 在 D 中一致有界

如果对 $\forall$ 紧集 $K \subset D$, $\exists M = M(K) > 0$ $\forall f \in F$ $\forall z \in K$, $|f(z)| \leq M$. 则称 F 在 D 中内闭一致有界

如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $\forall z_1, z_2$ 当 $|z_1 - z_2| < \delta$ 时 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$, $\forall f \in F$ 则称 F 在 D 上等度连续 (equi-continuous)

定理1. (Arzela-Ascoli) 设 $K \subset \mathbb{C}$ 为紧集 $\{f_n\}$ 为 K 上一致有界等度连续的函数列. 则 $\{f_n\}$ 必有子列在 K 上一致收敛

定理2. (Montel) 设 F 为域 D 上全纯函数族

则 F 为正规族 $\Leftrightarrow F$ 在 D 中内闭一致有界

证: 设 F 为正规族. 如果 D 中非内闭一致有界

则 $\exists$ 紧集 K , 一列 $\{f_n\} \in F$ s.t.

$$\sup \{ |f_n(z)| : z \in K \} \geq n$$

由于是正规族, $\{f_n\}$ 有子列在 K 中一致收敛

不妨设 $f_n \rightarrow f$ on K . $\Rightarrow f$ 在 K 中连续 $\Rightarrow$ 有界 M

由一致收敛 $\exists N$, $n \geq N$ 时 $|f_n(z) - f(z)| \leq 1 \quad \forall z \in K$

$$\Rightarrow |f_n(z)| \leq M+1 \quad \forall z \in K, \quad \forall n \geq N \quad \text{矛盾}$$

" $\Leftarrow$ " $\because F$ 全纯由闭一致有界 $\Rightarrow F$ 在每个紧集 K 上等度连续

设 $K \subset D$ 为紧集. 则 $\exists \delta > 0$, 对 $B(z, \delta) \subset D, \quad \forall z \in K$

设 $z_1, z_2 \in K$, $|z_1 - z_2| < \delta$. 取 $r = \partial B(z_1, \delta)$

$$\begin{aligned} \forall f \in F \quad |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_2} \right) d\zeta \right| \quad \text{B(1/2, \delta)} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} |f(\zeta)| \frac{|z_1 - z_2|}{|\zeta - z_1| |\zeta - z_2|} |d\zeta| \quad (|z| \leq M = \sup \{ |f(z)|, z \in \gamma \}) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} M \cdot \frac{|z_1 - z_2|}{2\delta^2} |d\zeta| \leq \frac{M}{\delta} |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ 在 K 上 等度连续

(1) 取一列紧集 $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = D$.

由定理 1: 对 F 任意序列 $\{f_n\}$ 有子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 K_1 中一致收敛

由定理 1: $\{f_{n_k}\}$ 有子列 $\{f_{n_{k_2}}\}$ 在 K_2 上一致收敛

依次下去 $f_1^{(1)} \quad f_2^{(1)} \quad f_3^{(1)} \dots$ 取 $g_n = f_n^{(n)}$ 则 $\{g_n\}$ 在每个 K_j 上一致收敛

$f_1^{(2)} \quad f_2^{(2)} \quad f_3^{(2)} \dots$

$\forall$ 紧集 $K \subset D \quad \exists j \quad K \subset K_j \quad \{g_n\}$ 在 K 上一致收敛

§7.2. Riemann 映射定理

定理 1. (Riemann) 设 $G \subset \mathbb{C}$ 为单连通域且 $G \neq \mathbb{C}$. 对于 $a \in G$, $\exists$ 唯一的共形映射 $f: G \rightarrow B(0,1)$ 满足 $f(a) = 0 \quad f'(a) > 0$

证 (1). 构造共形映射 $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ 使 $\varphi(G)$ 有界域

由 $G \neq \mathbb{C} \quad \exists b \neq \infty \quad b \in G$.

由 G 单连通 $g(z) = \sqrt{z-b} = e^{\frac{1}{2} \log(z-b)}$ 在 G 中

$g(G)$ 是 $\mathbb{R}$ 域 满足 $w \in g(G) \quad \text{则} \quad -w \in g(G)$

因为若 $-w \in g(G) \quad \text{则} \quad \exists z_1, z_2 \in G$.

$$w = \sqrt{z_1 - b} \quad -w = \sqrt{z_2 - b} \Rightarrow w^2 = z_1 - b = z_2 - b \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow w = -w$$

$$g(a) \in g(G) \quad \exists \delta > 0 \quad B(g(a), \delta) \subset g(G)$$

$$B(-g(a), \delta) \subset g(G)$$

$$\text{即} \quad \forall z \in G \quad |g(z) - (-g(a))| > \delta$$

$$\text{令} \quad \varphi(z) = \frac{1}{g(z) + g(a)} \quad \text{为单叶全纯} \quad |\varphi(z)| \leq \frac{1}{\delta} \quad \forall z \in G.$$

(2) 不妨设 G 为有界域 在 G 上定义函数族.

$$\mathcal{F} = \{f: G \rightarrow B(0,1) \mid f \text{ 单叶全纯} \quad f(a) = 0 \quad f'(a) > 0\}$$

f 不是空集. 假设 $G \subset B(0, R)$ 令 $f(z) = \frac{1}{2R}(z-a)$

取 $r_0 > 0$. 设 $B(a, r_0) \subset G$.

$$f'(a) = |f'(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r_0} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_0^2} 2\pi r_0 = \frac{1}{r_0}$$

记 $M = \sup_{f \in F} |f'(a)| < +\infty$ 下证 $\exists f_a \in F$ 且 $f_a'(a) = M$

$$\exists f_n \in F. \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(a) = M$$

由于在 G 上一致有界 由 Montel 定理, $\{f_n\}$ 有子列 $\{f_{n_k}\}$

在 G 中一致收敛. $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z) = f_*(z)$

由 Weierstrass 定理, f_* 全纯, f_{n_k} 在 G 中内闭一致收敛于 f_*

$$\Rightarrow f_*'(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}'(a) = M.$$

由于 $M > 0$ 故 f_* 不是常值, $\{f_{n_k}\}$ 为单叶全纯

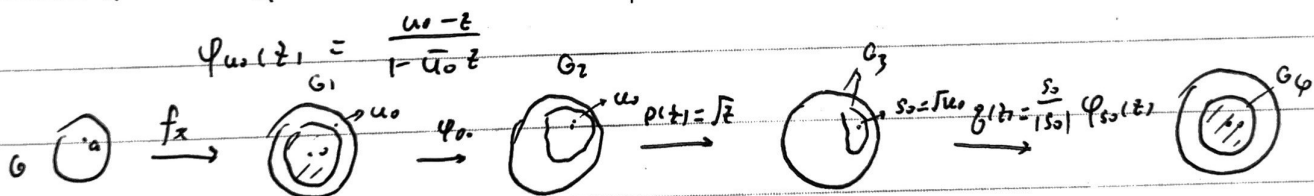
由 Hurwitz 定理 f_* 为单叶全纯

$$|f_{n_k}(z)| < 1, \forall z \in G. \Rightarrow |f_*(z)| \leq 1, \forall z \in G.$$

由最大模原理, $|f_*(z)| < 1, \forall z \in G.$

(1) 证明 $f_*(G) = B(0, 1)$

假设 $f_*(G) = G_1 \neq G$. G_1 单连通 且 $\exists u_0 \in B(0, 1) \setminus G_1$



记 $w(z) = g \circ p \circ \varphi_{u_0} \circ f_*(z) \in F$.

$$w'(a) = g'(s_0) p'(u_0) \varphi_{u_0}'(a) \cdot f_*'(a)$$

$$= \frac{s_0}{|s_0|} \cdot \frac{1}{1-|s_0|^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u_0}} (1-u_0^2) \cdot M$$

$$= \frac{1-|u_0|^2}{2|s_0|(1-|s_0|^2)} M = \frac{1-p^2}{2\sqrt{p}(1-p)} M = \frac{1+p}{2\sqrt{p}} M > M \quad \text{矛盾}$$

(4) w 是 π -值.

假设 $\exists f, g$ 满足条件.

$f \circ g^{-1} : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ 双全纯 $f \circ g^{-1}(0) = 0$

$$\Rightarrow f \circ g^{-1}(z) = e^{i\theta} z \quad (f \circ g^{-1})'(0) = \frac{f'(a)}{g'(a)} > 0$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} \in \mathbb{R} \Rightarrow f = g$$

§7.3. 边界对应原理.

定理1. 设 G 是由一条简单闭曲线围成的区域. 如果 $w = f(z)$ 将 G 共形地映为 $B(0,1)$, 则 f 可以连续扩充到边界 Γ 上且把 Γ 一一地映为 $|w|=1$.

证. (1) 先证明. $\forall \zeta \in \partial G$. $\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z)$ 存在.

只需证 若 $\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z) = a$ $\lim_{\substack{z_n \in G \\ z_n \rightarrow \zeta}} f(z_n) = b$ 则 $a = b$

易见 $a, b \in \partial B(0,1)$

否则 若 $a \in B(0,1)$ $f(a) \in G$ $\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(f(z_n)) = f^{-1}(a) \in G$.

假设 $a \neq b$. 作分式线性变换 $T: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$

$$T(a) = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad T(b) = e^{i\frac{5}{4}\pi} \quad \text{令 } g(z) = T(f(z))$$

$$\text{则 } \lim_{z \rightarrow \zeta} g(z) = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = e^{i\frac{5}{4}\pi}$$

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. 0 < |z - \zeta| < \delta \quad 0 < |z_n - \zeta| < \delta \text{ 时}$$

$$|g(z) - e^{i\frac{\pi}{4}}| < \varepsilon \quad |g(z_n) - e^{i\frac{5}{4}\pi}| < \varepsilon$$

设 $z_0 = g^{-1}(\zeta) \in G$.

取 $\delta > 0$ 充分小, 使 $G_\delta = B(\zeta, \delta) \cap G$ 不含 z_0

取 $z_n, z_n' \in G_\delta$. 在 G_δ 中取曲线 γ 连接 z_n, z_n' . 则

$L = g(\gamma)$ 为连接 $g(z_n)$ 和 $g(z_n')$ 的曲线

$$\text{令 } F(w) = (g'(w) - \zeta)(\overline{g'(w)} - \bar{\zeta})(g'(w) - \zeta)(\overline{g'(w)} - \bar{\zeta})$$

$$\text{当 } w \in \partial D \quad g'(w) \in \ell \Rightarrow |g'(w) - \zeta| < \delta$$

$$\text{记 } m = \sup_{z \in \bar{G}} |z - \zeta| \quad \text{则 } |F(w)| \leq \delta m^3$$

$$w \in \partial D', \partial D'', \partial D' \text{ 时同理 } |F(w)| \leq \delta m^3$$

由最大模原理 $|F(0)| < \delta m^3$

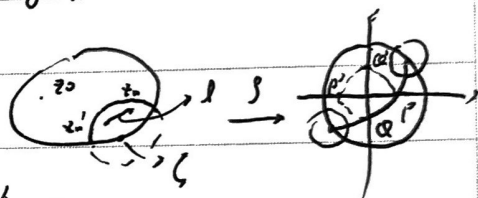
$$\text{即 } |z_0 - \zeta|^4 < \delta m^3$$

令 $\delta \rightarrow 0 \quad z_0 = \zeta$ 矛盾 从而 $a = b$.

(2) 对 $\forall \zeta \in \partial G$. 定义 $f(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} f(z)$

为证 $f \in C(\bar{G})$ 只需证 $\forall \zeta \in G. \lim_{\substack{\xi \in \partial G \\ \xi \rightarrow \zeta}} f(\xi) = f(\zeta)$

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. z \in G \cap B(\zeta, \delta) \text{ 时 } |f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$$



当 $z \in \partial G$. 且 $|z - \zeta| < \delta$ 时. $\exists \delta' > 0$. st

当 $z \in G \cap B(\zeta - \delta)$ 时. $|f(z) - f(\zeta)| < \frac{\epsilon}{2}$

取 $z \in G \cap B(\zeta - \delta) \cap B(\zeta, \delta')$ 则

$$|f(\zeta) - f(\zeta')| \leq |f(\zeta) - f(z)| + |f(z) - f(\zeta')| < \epsilon.$$

(3) 设 $\zeta, \zeta' \in \partial G$. 且 $\zeta \neq \zeta'$ 取 $\epsilon > 0$ st

$$B(\zeta, \epsilon) \cap B(\zeta', \epsilon) = \emptyset$$

$$\Rightarrow f(B(\zeta, \epsilon)) \cap f(B(\zeta', \epsilon)) = \emptyset \Rightarrow f(\zeta) \neq f(\zeta')$$

故 $f: \bar{G} \rightarrow \overline{B(0,1)}$ 连续. 单射. 也是满射.

$$(\text{因为 } f(\bar{G}) \text{ 紧 } B(0,1) \subset f(\bar{G}) \Rightarrow \overline{B(0,1)} \subset f(\bar{G}))$$

定理 2. 逆定理. 设 G 和 D 分别是由可求长简单闭曲线 γ 和 Γ 围成的区域. 如果 $f \in H(G) \cap C(\bar{G})$ 且把 γ 映为 Γ . 则 f 将 G 双全纯映为 D .

证. $\forall w_1 \in D$. 令 $g(z) = f(z) - w_1$

由辐角原理.

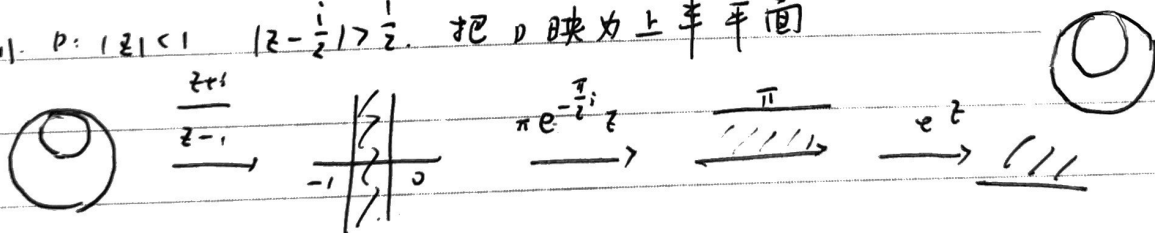
$g(z)$ 在 G 中的零点个数 = $g(\gamma)$ 绕 0 的圈数

$$= f(\gamma) \text{ 绕 } w_1 \text{ 的圈数} = 1$$

即存在唯一之 $z_0 \in G$. st $f(z_0) = w_1$.

同理 $w_2 \in D$ 类似可证不存在 $z_0 \in G$. $f(z_0) = w_2$

例. $D: |z| < 1, |z - \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}$. 把 D 映为上半平面



例. 求将 $D = \{z: |z| > 1, |z - \sqrt{3}i| < 2\}$ 映为单位圆盘的共形映射 f . 且

$$f(\sqrt{3}i) = 0, f(i\sqrt{3}) = 2$$

$$f(z) = -e^{i\theta} \frac{z^3 + 3z}{3z^2 + 1}$$